



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ενότητα 3 : Παραθύρωση Δεδομένων
Κωνσταντίνος Αγγέλης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Ενότητα 3: Παραθύρωση Δεδομένων
Κωνσταντίνος Αγγέλης
Καθηγητής
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Σκοποί ενότητας

- Στο παρόν κεφάλαιο, που είναι κατά βάση τεχνικό, θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ του Μετασχηματισμού Fourier μιας άπειρης ακολουθίας με το Μετασχηματισμό Fourier ενός πεπερασμένου τμήματός της.
- Η θεωρία που θα αναπτυχθεί έχει εφαρμογή σε δύο εντελώς διαφορετικά και άσχετα μεταξύ τους προβλήματα, τα οποία θα μας απασχολήσουν σε επόμενα κεφάλαια.
 - ✓ Σχεδίαση φίλτρων και
 - ✓ Εκτίμηση του συχνοτικού περιεχομένου σήματος



Περιεχόμενα ενότητας

- Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας
- Παράδειγμα 1
- Παράδειγμα 2
- Είδη Παραθύρων



Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

- Έστω ακολουθία δεδομένων x_n : $x_0, x_1, \dots, x_\infty$

με Μετασχηματισμό Fourier

$$X(e^{j\omega}) = F\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega}$$



Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο L δειγμάτων της προηγούμενης ακολουθίας, που δίχως απώλεια γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι είναι το x_0, x_1, \dots, x_{L-1} .

Με Μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n e^{-jn\omega}$$



Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

Ερώτημα:

Ποια η σχέση μεταξύ των:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) \quad X(e^{j\omega})$$



Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

- Έστω η ακολουθία $\hat{x}_n = \begin{cases} x_n & n = 0, 1, \dots, L-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

- Τότε $\hat{X}(e^{i\omega}) = X(e^{i\omega})$

- Επίσης: $\hat{x}_n = x_n \bar{\omega}_n$

- Όπου: $\bar{\omega}_n = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, L-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



Συχνοτικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

- Άρα: Τα L διαθέσιμα δείγματα προκύπτουν από την εφαρμογή ενός χρονικού τετραγωνικού παραθύρου μήκους L πάνω στην αρχική άπειρη ακολουθία x_n .



Συχνотικό Περιεχόμενο

Πεπερασμένης Ακολουθίας

Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier της πεπερασμένης ακολουθίας προκύπτει από τον Μετασχηματισμό Fourier της άπειρης με συνέλιξη με το Μετασχηματισμό Fourier της τετραγωνικής παραθυρικής ακολουθίας.

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \Pi(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi(e^{j\tau}) X(e^{j(\omega-\tau)}) d\tau$$

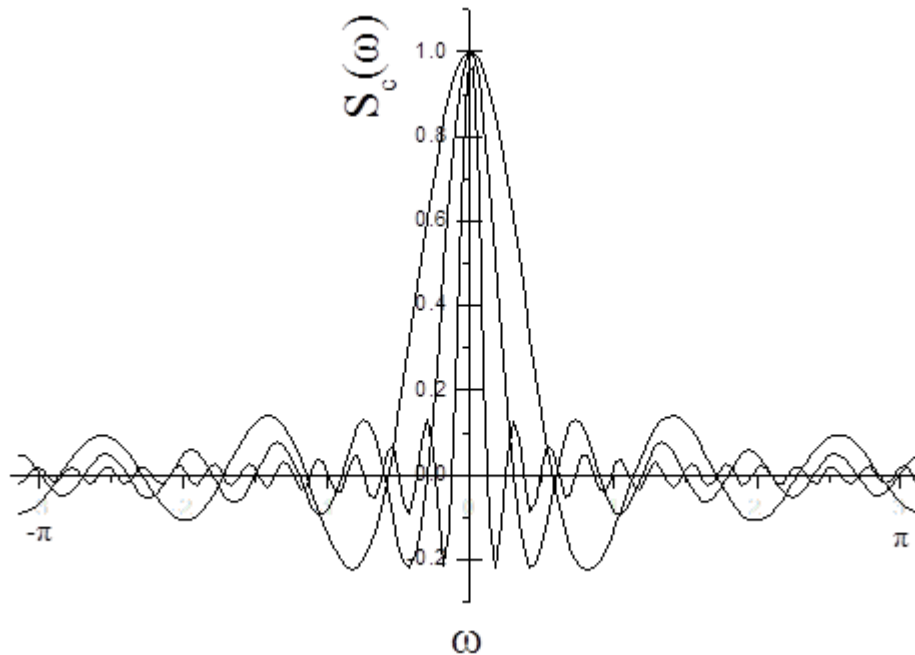
$$\Pi(e^{j\omega}) = F\{\bar{\omega}n\} = \left(L e^{-j\frac{L-1}{2}\omega} \right) \frac{\sin\left(\frac{L\omega}{2}\right)}{L \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Συχνотικό Περιεχόμενο

Πεπερασμένης Ακολουθίας

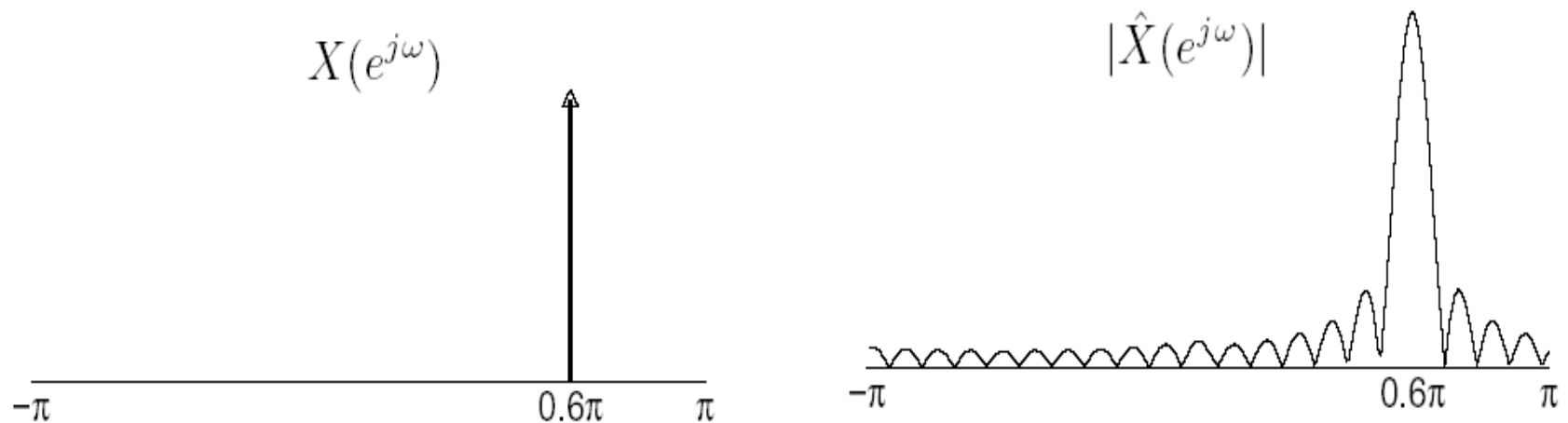
- Δημιουργούνται παρασιτικές συχνότητες εκτός της ζώνης συχνοτήτων του σήματος.





Παράδειγμα 1

- Έστω μιγαδικό ημιτόνο συχνότητας $\omega_0 = 0.6\pi$.



Με χρήση τετραγωνικού παραθύρου $L=21$.



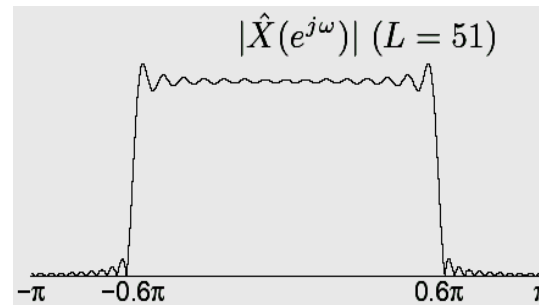
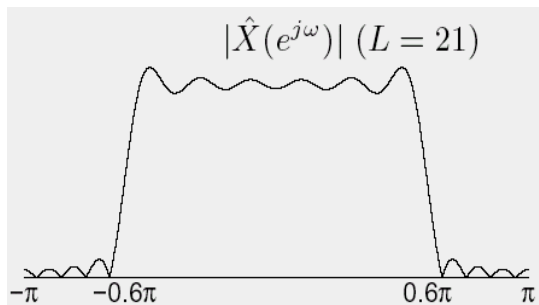
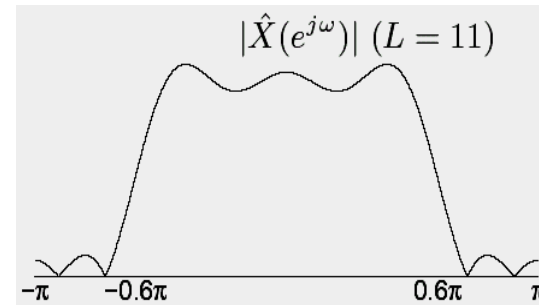
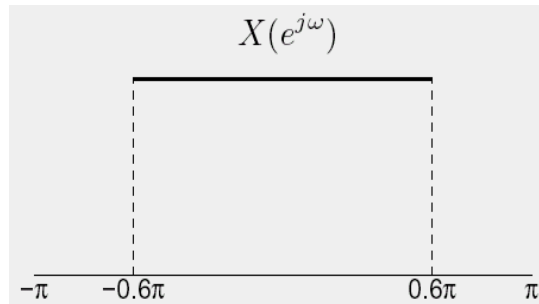
Παράδειγμα 1

- Παρατηρούμε ότι ο κεντρικός λοβός είναι τοποθετημένος πάνω στη σωστή συχνότητα. Ωστόσο εάν η παρουσία λοβού υποδηλώνει ύπαρξη συχνότητας, τότε είμαστε κατά κάποιο τρόπο υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν επίσης συχνότητες εκεί όπου εμφανίζονται οι δευτερεύοντες λοβοί, πράγμα που φυσικά δεν συμβαίνει.



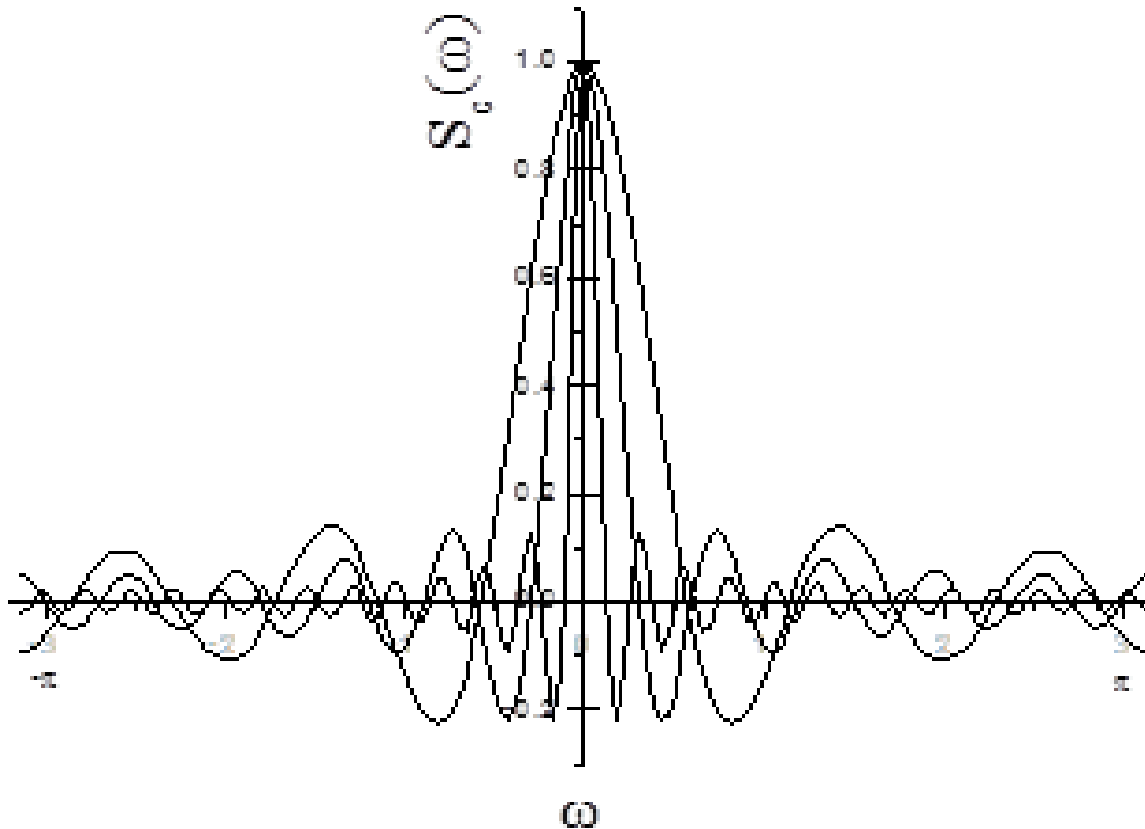
Παράδειγμα 2

Σήμα πεπερασμένου εύρους ζώνης.





Παράδειγμα 2





Παράδειγμα 2

- Ο κυματισμός που παρατηρείται, είναι αμείωτου πλάτους οσοδήποτε μεγάλος και να είναι ο αριθμός L των δειγμάτων και η παρουσία του οφείλεται στους αντίστοιχους κυματισμούς του Μετασχηματισμού Fourier του παραθύρου.
- Το αναμενόμενο θα ήταν να μειώνεται το σφάλμα προσέγγισης με αύξηση του αριθμού των δειγμάτων.



Είδη Παραθύρων

1. Τετραγωνικό Παράθυρο

$$\bar{\omega}_n = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

2. Παράθυρο Bartlett (Τριγωνικό)

$$\bar{\omega}_n = 1 - \frac{|n-N|}{N+1}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N+1$$

$$\bar{\omega}_n = 1 - \frac{|n-N+0.5|}{N+1}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N$$



Είδη Παραθύρων

3. Παράθυρο Hanning

$$\bar{\omega}_n = 0.5 \left(1 + \cos \frac{2\pi(n-N)}{L} \right), \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N + 1$$

$$\bar{\omega}_n = 0.5 \left(1 + \cos \frac{2\pi(n-N+0.5)}{L} \right), \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N$$

4. Παράθυρο Hamming

$$\bar{\omega}_n = 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi(n-N)}{L}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N + 1$$

$$\bar{\omega}_n = 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi(n-N+0.5)}{L} + 0.08 \cos \frac{4\pi(n-N+0.5)}{L}, \quad 0 \leq n \leq L-1,$$

$$\text{όταν } L = 2N$$



Είδη Παραθύρων

6.Παράθυρο Kaiser

$$\bar{\omega}_n = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n-N}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N + 1$$

$$\bar{\omega}_n = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n-N+0.5}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N$$

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^k}{2^k k!} \right]^2$$



Είδη Παραθύρων

7. Παράθυρο Chebyshev

$$\bar{\omega}_n = \frac{1}{L} \left\{ \gamma + 2 \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2(n-N)k\pi}{L}\right) T_k\left(\beta \cos \frac{k\pi}{L}\right) \right\}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N + 1$$

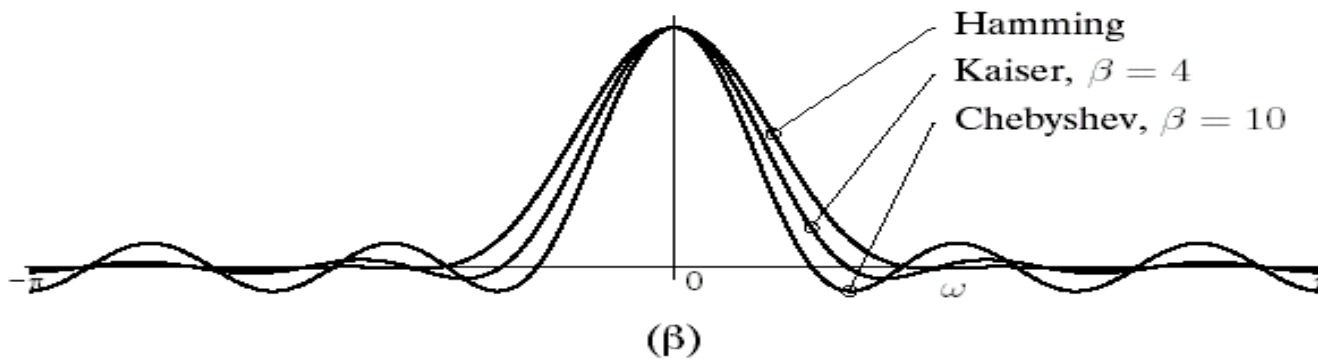
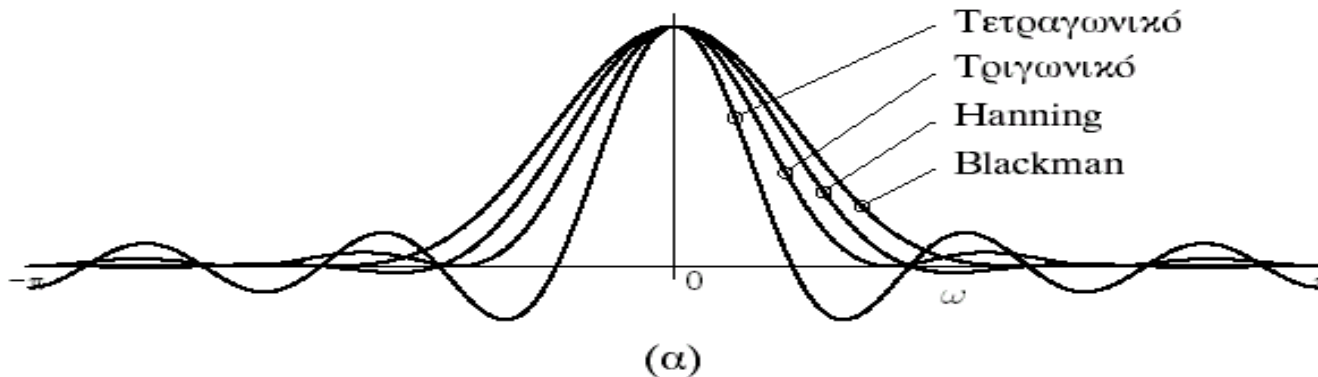
$$\bar{\omega}_n = \frac{1}{L} \left\{ \gamma + 2 \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2(n-N+0.5)k\pi}{L}\right) T_k\left(\beta \cos \frac{k\pi}{L}\right) \right\}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N$$

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1}(x)) & \text{για } x \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1}(x)) & \text{για } x > 1 \end{cases}$$



Είδη Παραθύρων

Μετασχηματισμός Fourier των διαφόρων παραθύρων μεγέθους ($L=11$)





Είδη Παραθύρων

Σχετικό πλάτος δευτερεύοντος λοβού και εύρος κύριου λοβού ανά παράθυρο

Παράθυρο	Πλάτος Δευτ. Λοβού (dB)	Εύρος Κύριου Λοβού
Τετραγωνικό	-13	$4\pi/L$
Bartlett	-25	$8\pi/L$
Hanning	-31	$8\pi/L$
Hamming	-41	$8\pi/L$
Blackman	-57	$12\pi/L$



Βιβλιογραφία

Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων, Γεώργιος Β. Μουστακίδης, 2004, Εκδόσεις Τζιόλα

Digital Signal Processing, Electrical Engineering EE-880 , Kunio Takaya, College of Engineering University of Saskatchewan.

Introduction to Signal Processing, Sophocles J. Orfanidis, Rutgers University



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/>





Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Παραθύρωση Δεδομένων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ