Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## Ενότητα 8 : Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Κωνσταντίνος Αγγέλης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΤΕΙ ΗΠΕΙΡΟΥ

ανοικτά μαθήματα opencourses

# Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## **Ενότητα 8:** Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Κωνσταντίνος Αγγέλης
Καθηγητής

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Σκοποί ενότητας

- Να εισάγει τον ορισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και του αντίστροφου
- Μετατροπή βασικών σημάτων σε διακριτά με τη χρήση του μετασχηματισμού fourier.
- Παρουσίαση και χρήση των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier

# Περιεχόμενα ενότητας

- Ορισμοί DFT-IDFT
- Σχέση του DFT με DTFT
- 1ο παράδειγμα
- Ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier
- Discrete Time Fourier Transform – DTFT
- Ζευγάρια Μετασχηματισμών DTFT
- Απόκριση Συχνότητας

# Περιεχόμενα ενότητας

- Συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά
- Συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα

# Ορισμοί DFT-IDFT

Ο ευθύς διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform – **DFT**) ορίζεται ως:

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n(k) W_N^{kn}, \qquad 0 \le k \ge N-1$$

Όπου $W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Inverse Discrete Fourier Transform – **IDFT**) ορίζεται ως: $x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) W_N^{-kn}$

# Σχέση του DFT με DTFT

Αν το σήμα είναι πεπερασμένου χρόνου στο διάστημα

$[0{:}N-1]$ τότε

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

αν $\omega_k = (2\pi/N)\cdot k, k \in [0{:}N-1]$

τότε $$X\left(e^{-j(2\pi/N)\cdot k}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j(2\pi/N)\cdot kn} = X(k)$$

# 1ο παράδειγμα

Δίνεται το σήμα $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$

Ο διακριτός μετασχηματισμού Fourier

$N = 10$ σημείων του σήματος είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n) \cdot W_{10}^{nk}, k \in [0:9] \qquad W_{10} = e^{-j2\pi/10} = e^{-j\pi/5}$$

Επομένως $X(k) = \sum_{n=0}^{9} \left(\delta(n) + 2\delta(n-5)\right) \cdot \left(W_{10}\right)^{nk}, k \in [0:9]$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{9} \left(\delta(n) + 2\delta(n-5)\right) \cdot \left(W_{10}\right)^{nk} = 1 \cdot \left(W_{10}\right)^{0 \cdot k} + 2 \cdot \left(W_{10}\right)^{5 \cdot k}$$

$$= 1 + 2 \cdot \left(e^{-j\pi/5}\right)^{5k} = 1 + 2 \cdot \left(e^{-j\pi}\right)^{k}, k \in [0:9]$$

# 1ο παράδειγμα

- Χρησιμοποιώντας την ***ταυτότητα του Euler***

$$e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi)$$

$$X(k) = 1 + 2\cdot\left(e^{-j\pi}\right)^k = 1 + 2\cdot\left[\cos(-\pi) + j\cdot\sin(-\pi)\right]^k = 1 + 2\cdot\left[\cos(\pi) - j\cdot\sin(\pi)\right]^k$$

$$= 1 + 2\cdot\left[-1 - j\cdot 0\right]^k = 1 + 2\cdot(-1)^k, k\in[0:9]$$

# Ιδιότητες διακριτού μετασχηματισμού Fourier

| Ιδιότητα διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) | Σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ | Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) $X(k)$ |
|---|---|---|
| Γραμμικότητα | $c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ | $c_1 \cdot X_1(k) + c_2 \cdot X_2(k)$ |
| Συμμετρία πραγματικού σήματος | $x(n)$ πραγματικό σήμα | $X(k) = X^*((N-k))_N$ |
| Συμμετρία φανταστικού σήματος | $x(n)$ φανταστικό σήμα | $X(k) = -X^*((N-k))_N$ |
| Κυκλική μετατόπιση | $x((n-n_0))_N$ | $W_N^{n_0 k} \cdot X(k)$ |
| Κυκλική αναδίπλωση | $x((-n))_N$ | $X^*(k)$ |
| Κυκλική συνέλιξη | $x_1(n) \#\ x_2(n)$ | $X_1(k) \cdot X_2(k)$ |

# Discrete Time Fourier Transform - DTFT

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (**DTFT**) ενός σήματος x(n) ορίζεται ως ακολούθως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος x(n) υπάρχει αν ισχύει η σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = S < \infty$$

# Discrete Time Fourier Transform - DTFT

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός ως προς ω με περίοδο 2π

# Ζευγάρια Μετασχηματισμών DTFT

| σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ | μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$ |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $\delta(n-n_0)$ | $e^{-j\omega n0}$ |
| $1$ | $2\pi\delta(\omega)$ |
| $e^{j\omega 0n}$ | $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ |
| $a^n u(n), -1<a<1$ | $1/(1-ae^{-j\omega})$ |
| $\cos(n\omega_0)$ | $\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$ |

# Ιδιότητες DTFT

| ιδιότητα μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) | σήμα διακριτού χρόνου x(n) | μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$ |
|---|---|---|
| γραμμικότητα | $c1\ x1(n) + c2\ x2(n)$ | $c1\ X1(e^{j\omega}) + c2\ X2(e^{j\omega})$ |
| μετατόπιση στο χρόνο | $x(n-n_0)$ | $e^{-j\omega n0}\ X(e^{j\omega})$ |
| αντιστροφή στο χρόνο | $x(-n)$ | $X(e^{-j\omega})$ |
| μετατόπιση στη συχνότητα | $e^{-j\omega n0}\ x(n)$ | $X(e^{j(\omega-\omega o)})$ |
| συνέλιξη στο χρόνο | $x1(n)*x2(n)$ | $X1(e^{j\omega})\ X2(e^{j\omega})$ |

# Απόκριση Συχνότητας

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $H(e^{j\omega})$ της κρουστικής απόκρισης h(n) ονομάζεται **απόκριση συχνότητας**:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) X(ejω) της εισόδου x(n) και
ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) Y(ejω) της εξόδου y(n) του φίλτρου συνδέονται με τη σχέση: $\mathbf{Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\,X(e^{j\omega})}$

# Συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά

- Αν ένα σύστημα $W(e^{j\omega})= H_1(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$ συνδεθεί **σε σειρά** με ένα σύστημα
- $Y(e^{j\omega})= H_2(e^{j\omega})\, W(e^{j\omega})$ τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο x(n), έξοδο y(n) και απόκριση συχνότητας

$$\mathbf{H(e^{j\omega})= H_1(e^{j\omega})\, H_2(e^{j\omega})}$$

όπου $Y(e^{j\omega})= H(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$

# Συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα

- Αν ένα σύστημα $W(e^{j\omega})= H_1(e^{j\omega})\ X(e^{j\omega})$ συνδεθεί παράλληλα με ένα σύστημα $V(e^{j\omega})= H_2(e^{j\omega})\ X(e^{j\omega})$ προσθέτοντας τις εξόδους των φίλτρων, δηλαδή:

$$Y(e^{j\omega})= W(e^{j\omega}) + V(e^{j\omega})$$

- τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο x(n), έξοδο y(n) και απόκριση συχνότητας

$$\mathbf{H(e^{j\omega})= H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})}$$

όπου $Y(e^{j\omega})= H(e^{j\omega})\ X(e^{j\omega})$

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.
Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Τέλος Ενότητας

**Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή**

Άρτα, 2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Τέλος Ενότητας

## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ