



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ενότητα 13 : Φίλτρα IIR
Κωνσταντίνος Αγγέλης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ενότητα 13: Φίλτρα IIR

Κωνσταντίνος Αγγέλης
Καθηγητής
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Σκοποί ενότητας

- Μελέτη μεθόδων υλοποίησης IIR φίλτρων.
- Εξάσκηση στη σχεδίαση IIR φίλτρων χρησιμοποιώντας απλουστευμένες μέθοδοι



Περιεχόμενα ενότητας

- **Πρότυπα Αναλογικών Φίλτρων**
- **Σχεδίαση IIR φίλτρων από αναλογικά φίλτρα**
- **Κρουστική Αμεταβλητότητα**
- **Διγραμμικός Μετασχηματισμός (bilinear transformation)**
- **Ελάχιστα Τετράγωνα**
- **Προσέγγιση Pade**



Περιεχόμενα ενότητας

- Υπολογισμοί Προσέγγισης Pade
- Μέθοδος Prony
- Προσέγγιση αντίστροφου FIR φίλτρου
- Παράδειγμα Προσέγγισης αντίστροφου FIR φίλτρου



Πρότυπα Αναλογικών Φίλτρων

- **Φίλτρα Butterworth**
- **Φίλτρα Chebychev**
- **Ελλειπτικά φίλτρα**



Σχεδίαση IIR φίλτρων από αναλογικά φίλτρα

- Κρουστική Αμεταβλητότητα
- Διγραμμικός Μετασχηματισμός
- Ελάχιστα Τετράγωνα



Κρουστική Αμεταβλητότητα

- Impulse Invariance Transformation
- Δειγματοληψία στην κρουστική απόκριση ενός αναλογικού φίλτρου με περίοδο δειγματοληψίας T_s :

$$h(n) = h_a(nT_s)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(j \frac{\omega}{T_s} + j \frac{2\pi k}{T_s})$$



Διγραμμικός Μετασχηματισμός (bilinear transformation)

- Απεικόνιση (μετασχηματισμός) s -επίπεδο στο z -επίπεδο:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$H(z) = H_a(s)$$



Διγραμμικός Μετασχηματισμός

Παράδειγμα

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}, a > 0, T_s = 2$$

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} = \frac{1+z^{-1}}{(1+a) - (1-a)z^{-1}} = \frac{1}{1+a} \frac{1+z^{-1}}{1 - \frac{1-a}{1+a} z^{-1}}$$

πόλος στο $z = \frac{1-a}{1+a}$

ρίζα στο $z = -1$



Ελάχιστα Τετράγωνα

Προσέγγιση Pade

- Μέθοδος Prony
- Προσέγγιση αντίστροφου FIR φίλτρου



Προσέγγιση Pade

$$h_d(n) \text{ προσεγγίζεται με } h(n) \leftrightarrow H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^p a(k)z^{-k}}$$

$$h_d(n) + \sum_{k=1}^p a_k h_d(n-k) = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, q \\ 0, & n = q+1, \dots, q+p \end{cases}$$



Υπολογισμοί Προσέγγισης Pade

υπολογισμός $a_k, k = 1, \dots, p$ από p τελευταίες εξισώσεις :

$$\begin{bmatrix} h_d(q) & h_d(q-1) & \dots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \dots & h_d(q-p+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_d(q+p-1) & h_d(q+p-2) & \dots & h_d(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_d(q+1) \\ h_d(q+2) \\ \dots \\ h_d(q+p) \end{bmatrix}$$

υπολογισμός $b_k, k = 0, 1, \dots, q$ από $q+1$ πρώτες εξισώσεις :

$$b_n = h_d(n) + \sum_{k=1}^p a_k h_d(n-k), n = 0, 1, \dots, q$$

όταν $n = 0, 1, \dots, p+q$, τότε $h(n) = h_d(n)$

όταν $n > p+q$, τότε $h(n)$ δεν είναι καλή προσέγγιση της $h_d(n)$



Παράδειγμα Προσέγγισης Pade

$$h_d(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, q = 1, p = 1$$

$$h_d(1)a_1 = -h_d(2) \Rightarrow 3\frac{1}{2}a_1 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_d(0) + a_1 h_d(-1) = b_0 \\ h_d(1) + a_1 h_d(0) = b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 + a_1 \cdot 0 = b_0 \\ \frac{3}{2} + a_1 \cdot 3 = b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 3 \\ b_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$H(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$



Μέθοδος Prony

*ελαχιστοποίηση σφάλματος
ελαχίστων τετραγώνων*

$$E = \sum_{n=0}^L |h_d(n) - h(n)|^2$$



Προσέγγιση αντίστροφου FIR φίλτρου

$$h(n) * g(n) = \delta(n)$$

ελαχιστοποίηση σφάλματος

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} |e(n)|^2, e(n) = \delta(n) - h(n) * g(n)$$

υπολογισμός $h(n)$ με επίλυση γραμμικών εξισώσεων :

$$\sum_{l=0}^{N-1} h(l) r_g(k-l) = \begin{cases} g(0), & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$r_g(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) g(n-k)$$



Παράδειγμα Προσέγγισης αντίστροφου FIR φίλτρου

$$g(n) = [2 \quad 1] \text{ στο } [0 \quad 1], N = 3$$

$$\sum_{l=0}^2 h(l)r_g(k-l) = \begin{cases} g(0), & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2 \end{cases}$$

$$r_g(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)g(n-k) = g(n) * g(-n) \text{ (αυτοσυσχέτιση)}$$

$$r_g(-1) = 2, r_g(0) = 5, r_g(1) = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0)r_g(0) + h(1)r_g(-1) + h(2)r_g(-2) = g(0) \\ h(0)r_g(1) + h(1)r_g(0) + h(2)r_g(-1) = 0 \\ h(0)r_g(2) + h(1)r_g(1) + h(2)r_g(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.494 \\ -0.235 \\ 0.094 \end{bmatrix}$$

$$\delta(n) = h(n) * g(n) = [0.988 \quad 0.023 \quad -0.047 \quad 0.094] \text{ στο } [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} |e(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\delta(n) - h(n) * g(n)|^2 = 0.0118$$



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/>





Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Φίλτρα IIR



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ