Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Αρδεύσεις (Εργαστήριο)

Ενότητα 3 : Υδροστατική Ι

Δρ. Μενέλαος Θεοχάρης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Η υδροστατική μελετά τους νόμους, που διέπουν τα ρευστά όταν αυτά βρίσκονται σε ισορροπία. Ένα ρευστό βρίσκεται σε ισορροπία, είτε όταν ακινητεί, είτε όταν κινείται μεν, αλλά κινείται σαν απολύτως στερεό σώμα.

Η συμπεριφορά των πραγματικών υγρών υπό την επίδραση των μοριακών δυνάμεων αποτελεί ιδιαίτερο κεφάλαιο της Υδροστατικής όπου και εξετάζονται η επιφανειακή τάση, τα τριχοειδή φαινόμενα οι δυνάμεις συνοχής και συνάφειας κλπ. Θα εξεταστούν στη συνέχεια τα ρευστά σε ηρεμία.

2.1 Η υδροστατική πίεση

Ένα ρευστό όταν περιορισθεί μέσα σε στερεά όρια (τοιχώματα) εξασκεί κάθετες δυνάμεις πάνω στις οριακές επιφάνειες.

Η κάθετη δύναμη, που εξασκείται από το ρευστό πάνω στη μονάδα επιφάνειας των ορίων του, λέγεται υδροστατική πίεση του ρευστού ή απλά πίεση και παριστάνεται με το σύμβολο p.

Η υδροστατική πίεση οφείλεται στην εξωτερική δύναμη της βαρύτητας και μόνο, δηλαδή στο βάρος του ρευστού που βρίσκεται πάνω από το αντικείμενο ή την επιφάνεια. Έτσι αν με **F** χαρακτηρισθεί η δύναμη, η οποία παριστά το βάρος του υπερκείμενου υγρού σε μία επιφάνεια **E** (εντός του ρευστού) και επί της οποίας ασκείται αυτή, τότε η υδροστατική πίεση **p** δίδεται από τη σχέση:

$$p = \frac{F}{E}$$

Γενικά η πίεση πάνω σε μία τυχούσα επιφάνεια μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Η ένταση της πίεσης σε οποιοδήποτε σημείο δίνεται τότε από τη διαφορική σχέση:

$$p = \lim \frac{\Delta F}{\Delta E} = \frac{dF}{dE} \quad \text{όταν} \quad \Delta E \rightarrow 0$$

Σύμφωνα με τον νόμο δράση - αντίδραση, και οι οριακές επιφάνειες εξασκούν πάνω στο ρευστό δύναμη ίση σε ένταση και αντίθετη σε διεύθυνση με αυτή την οποία το ρευστό εξασκεί επάνω τους. Δεδομένου δε ότι σε ένα ρευστό σε ηρεμία υπάρχουν μόνο συμπιεστικές τάσεις, η υδροστατική πίεση στο όριο οποιουδήποτε όγκου ρευστού είναι πάντοτε κάθετη πάνω στο όριο και έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό του όγκου.

1. Επειδή κατά τις εφαρμογές της Υδραυλικής η μεν δύναμη μετριέται σε Νιούτον (N) και αντίστοιχα η δε επιφάνεια σε τετραγωνικά μέτρα (m^2), η υδροστατική πίεση, p , θα εκφράζεται σε Νιούτον ανά τετραγωνικό μέτρο (N/m^2) και ονομάζεται Πασκάλ (Pa) είναι δηλαδή $1Pa = 1N/m^2$

2.2 Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ PASCAL

Η «Αρχή του Pascal»[1] που προσδιορίσθηκε από τον Γάλλο φυσικό και μαθηματικό Μπλεζ Πασκάλ (1623-1662), προς τιμή του οποίου και φέρει το όνομά της, καθορίζει ότι: **Η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο ενός ρευστού, που βρίσκεται σε ηρεμία, είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, δηλαδή η πίεση δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση μιας επιφάνειας που περνά από το σημείο πάνω στο οποίο επενεργεί**.

Αν δηλαδή, σ' ένα ανοικτό δοχείο πλήρες υγρού εφαρμόσουμε σε όλη την ελεύθερη επιφάνειά του, π.χ. μ' ένα έμβολο, οποιαδήποτε πίεση τότε θα διαπιστώσουμε ότι οι δυνάμεις που θ' ασκεί το υγρό σε οποιοδήποτε σημείο των εσωτερικών τοιχωμάτων ή του πυθμένα του δοχείου, ανεξάρτητα της βαρύτητας, θα παρουσιάζουν παντού την ίδια τιμή. Προφανές λοιπόν είναι ότι η πίεση αυτή, που προέρχεται από εξωτερικές δυνάμεις π.χ. ατμοσφαιρική πίεση ή, πίεση από πεπιεσμένο αέρα ή, πίεση που ασκεί ένα έμβολο στην επιφάνεια ενός υγρού, είναι τελείως ανεξάρτητη των δυνάμεων της γήινης βαρύτητας. Αυτό σε αντιδιαστολή με την υδροστατική πίεση που εξαρτάται από την βαρύτητα.

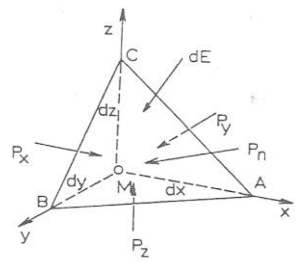
Εφαρμογές της Αρχής του Πασκάλ αποτελούν η πλήρωση με αέρα ενός τροχού ή μπαλονιού, το υδραυλικό πιεστήριο, οι υδραυλικοί γερανοί, τα υδραυλικά φρένα και πλείστα άλλα.

Απόδειξη της Αρχής του Πασκάλ

Για την απόδειξη της αρχής του Pascal, ας φαντασθούμε μέσα στο ρευστό σε ηρεμία έναν πολύ μικρό όγκο του με σχήμα ορθογώνιο τετράεδρο με πλευρές dx, dy και dz κατά μήκος των αντιστοίχων αξόνων, x, y, z των καρτεσιανών συντεταγμένων. Έστω ότι το σημείο M είναι η κορυφή της τρισορθογώνιας γωνίας του τετράεδρου και η αρχή των αξόνων.

Έστω px, py και pz οι υδροστατικές πιέσεις που ενεργούν αντίστοιχα πάνω στις επιφάνειες του τετράεδρου που είναι κάθετες πάνω στους άξονες, x, y και z και έστω p, η υδροστατική πίεση πάνω στη στοιχειώδη κεκλιμένη επιφάνεια ΑΒΨ = dE.

Όλες οι πιέσεις ενεργούν κάθετα πάνω στις αντίστοιχες επιφάνειες και με διεύθυνση προς το εσωτερικό του τετράεδρου. Εκτός όμως από τις δυνάμεις πίεσης ενεργούν πάνω στη μάζα του τετράεδρου και άλλες δυνάμεις, συνήθως δε η βαρύτητα, που έχουν συνιστώσες f_x, f_y και f_z στη μονάδα της μάζας, με διεύθυνση προς το εξωτερικό του τετράεδρου.



Η συνθήκη της ισορροπίας κατά τον x άξονα είναι :

$$p_x\,(\frac{1}{2}\ dy\ \ dz\ )\ -\ p_n\ dE\ \sigma\upsilon\nu\,(P,x) + f_x(\frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz) =\ 0$$

όπου $\frac{1}{2}\ dy\ \ dz = dE\ \sigma\upsilon\nu\,(P,x)$ είναι η προβολή του εμβαδού της κεκλιμένης επιφάνειας dE πάνω στο επίπεδο yMz.

Διαιρώντας την εξίσωση δια $\frac{1}{2}\ dy\ \ dz$ παίρνουμε $p_x\ -\ p_n\ + \frac{1}{3}\rho f_x\ dx =\ 0$

Αν το τετράεδρο αφεθεί να σμικρυνθεί πάρα πολύ, ο τελευταίος όρος της εξίσωσης ο οποίος περιλαμβάνει το διαφορικό dx, θα τείνει προς το μηδέν, ενώ οι πιέσεις p_x και p_n, παραμένουν πεπερασμένες.

Έτσι στο όριο $dx \to 0$ έχουμε :

$$p_x\ -\ p_n = 0\ \Rightarrow p_x\ = p_n$$

Όμοια, με την ισορροπία των δυνάμεων και προς τις διευθύνσεις y και z, θα έχουμε :

$p_y\ -\ p_n = 0\ \Rightarrow p_y = p_n$ και $p_z\ -\ p_n = 0\ \Rightarrow p_z\ = p_n$

Άρα : $p_x = p_y = p_z\ = p_n$

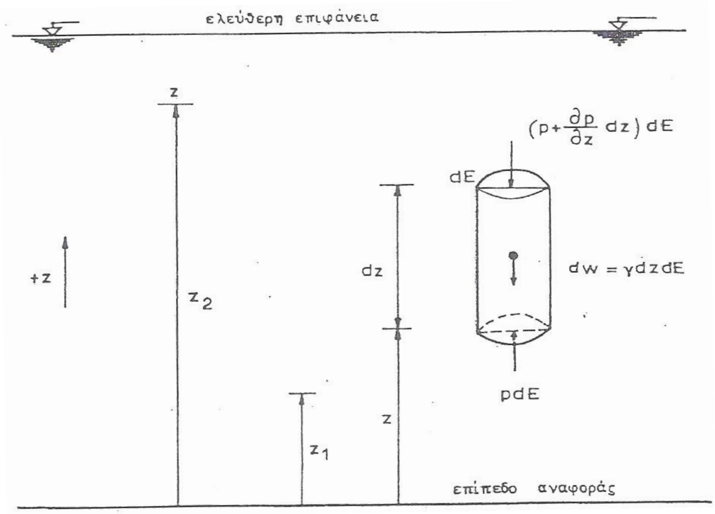
[1] Το 1583 περίπου, ο Ολλανδός μαθηματικός Σίμον Στεβάιν (Simon Stevin, 1548-1620) απέδειξε ότι η πίεση που ασκεί ένα υγρό πάνω σε μια δεδομένη επιφάνεια εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται η επιφάνεια και όχι από το σχήμα του δοχείου που περιέχει το υγρό. Όμως κατά τον 17ο αιώνα ο Βλάσιος Πασκάλ διατύπωσε τη θεμελιώδη αρχή της υδροστατικής τη γνωστή ως «Αρχή του Πασκάλ». Από τότε η περαιτέρω πρόοδος της υδροστατικής συνίσταται κυρίως αφενός σε θεωρητικές διερευνήσεις των δύο παραπάνω βασικών αρχών, αφετέρου σε πρακτικές εφαρμογές των πορισμάτων αυτών.

Δεδομένου ότι οι διαστάσεις dx, dy και dz του τετράεδρου πάρθηκαν αυθαίρετα, η κλίση της επιφάνειας ΑΒΨ = dE είναι επίσης αυθαίρετη και κατά συνέπεια όταν το τετράεδρο σμικρυνθεί ώστε να γίνει σημείο, η πίεση στο σημείο αυτό είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις.

2.3 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΥΨΟΜΕΤΡΟ ΜΕΣΑ ΣΕ ΕΝΑ ΡΕΥΣΤΟ

Η μεταβολή της πίεσης από σημείο σε σημείο μέσα στη μάζα ενός ρευστού σε ηρεμία μπορεί να προσδιορισθεί ως εξής :

Αν θεωρηθεί ένας στοιχειώδης κυλινδρικός όγκος ρευστού με εμβαδόν διατομής dE και ύψος dz, όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι δυνάμεις οι οποίες επενεργούν πάνω σε αυτόν οφείλονται στις υδροστατικές πιέσεις και στη βαρύτητα. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις στην κατακόρυφη διεύθυνση z



Επειδή το ρευστό είναι σε ηρεμία, είναι:

$$p\, dE - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dE - \gamma\, dz\, dE = 0$$

Από την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

Η μερική παράγωγος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί και σαν ολική, ή κανονική παράγωγος του p ως προς z γιατί σ' αυτό το πρόβλημα η πίεση p μεταβάλλεται μόνο κατά τη z διεύθυνση. Άρα η εξίσωση γράφεται :

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \Rightarrow \frac{dp}{\gamma} = -dz \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\gamma} = -\int_{z_1}^{z_2} dz = -(z_2 - z_1) = -h$$

όπου h είναι η υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων z_1 και z_2.

Η εξίσωση ισχύει για συμπιεστά και ασυμπίεστα ανομοιογενή ή ομογενή ρευστά. Η ολοκλήρωση όμως του πρώτου όρου ενώ επιτυγχάνεται πάντοτε για την περίπτωση των ασυμπίεστων ομογενών ρευστών, για τα συμπιεστά ρευστά καθώς και για τα ανομοιογενή ασυμπίεστα ρευστά, η ολοκλήρωσή του εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ της πίεσης p και του ειδικού βάρους γ ([2]).

---

[2] Με τον όρο **Ειδικό βάρος** χαρακτηρίζεται ο λόγος του βάρους ενός σώματος προς τον όγκο αυτού ή προς το βάρος ίσου όγκου αποσταγμένου νερού και θερμοκρασίας 4 °C.Είναι αδιάστατο μέγεθος και γι' αυτό έχει την

Για τα ομογενή υγρά το ειδικό βάρος γ παραμένει σχετικά σταθερό οπότε προκύπτει :

$$\frac{p_2}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}=-(z_2-z_1)\Rightarrow\frac{p_2}{\gamma}+z_2=\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\text{σταθερό}$$

<u>Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής</u>

Ο όρος **p/γ** έχει διαστάσεις μήκους και γι' αυτό λέγεται **ύψος πίεσης**, ή φορτίο πίεσης, ο δε όρος **z, λέγεται ύψος θέσης**, ή φορτίο θέσης.

Το άθροισμα **p/γ + z λέγεται πιεζομετρικό ύψος**, ή υδραυλικό φορτίο.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής προκύπτει:

$$p_1-p_2=\Delta p=\gamma\,(z_2-z_1)=\gamma h$$

Εάν το z_2 βρίσκεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, τότε η πίεση $p_2 = p_\alpha$ = ατμοσφαιρική πίεση και επομένως ισχύει :

$$p_1=p_a+\gamma h$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την πραγματική ή απόλυτη πίεση πάνω σε ένα σημείο μέσα σε ομογενές υγρό σταθερού ειδικού βάρους.

Εάν τεθεί $p = p_1 - p_a$ τότε η εξίσωση γίνεται :

$$p=\gamma h$$

η οποία δίνει τη σχετική πίεση, ή πίεση οργάνου πάνω σε ένα σημείο μέσα σε ομογενές υγρό σταθερού ειδικού βάρους.

Η σχετική πίεση μπορεί να είναι θετική, δηλαδή μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής πίεσης, ή αρνητική, δηλαδή μικρότερη της ατμοσφαιρικής πίεσης. Η αρνητική σχετική πίεση καλείται επίσης και κενό.

Ατμοσφαιρική πίεση ή «Βαρομετρική πίεση» ονομάζεται η πίεση που ασκεί η ατμόσφαιρα, με το βάρος της, στην επιφάνεια της Γης. Η ατμοσφαιρική πίεση που υφίσταται το σώμα του ανθρώπου αντισταθμίζεται από τον αέρα και τα λοιπά ρευστά που κυκλοφορούν εντός του οργανισμού του.

Η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας ισούται, για θερμοκρασία ^{0}C, με 101337,3 Pa ή 1,013373 bar ή 1,033 Kp/cm^2 ή 10,33 tn/m^2. Η τιμή αυτή της ατμοσφαιρικής πίεσης χρησιμοποιείται σαν πρακτική μονάδα μέτρησης της πίεσης και συνήθως λέγεται φυσική ατμόσφαιρα, (1atm = 101337,3 Pa = 1,013373 bar = 1,033 Kp/cm^2 = 10,33 tn/m^2).

Στην πράξη χρησιμοποιείται η τεχνική ατμόσφαιρα, at, η οποία ισούται με 98100 Pa = 0,10 MPa =1Kp/cm^2.

Το ύψος της κανονικής ατμοσφαιρικής πίεσης[3] εξαρτάται από το ειδικό βάρος του υγρού μέτρησης και είναι για το νερό:

ιδιότητα να έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το σύστημα μονάδων που θα χρησιμοποιηθεί για την έκφραση της πυκνότητας της ουσίας. Σαν ουσία αναφοράς για υγρά και στερεά χρησιμοποιείται συνήθως το νερό. Έτσι το σχετικό ειδικό βάρος μιας ουσίας είναι ο λόγος της πυκνότητάς της, προς την πυκνότητα του νερού. Για το σχετικό ειδικό βάρος των αερίων, σαν ουσία αναφοράς χρησιμοποιείται συχνά ο αέρας.

[3] Ως πρώτη μονάδα πίεσης χρησιμοποιείται η **ατμόσφαιρα** (και ορθότερα φυσική ατμόσφαιρα) που παρίσταται με το διεθνές σύμβολο **Atm** και που αντιπροσωπεύει την πίεση που ασκεί το βάρος του αέρα της ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της Γης.

$$h_{H_2O} = \frac{p_a}{\gamma_{H_2O}} = \frac{101337{,}3\,Pa}{9810\,N/m^3} = \frac{101337{,}3\,N/m^2}{9810\,N/m^3} = 10{,}33\,m\,H_2O$$

και για τον υδράργυρο:

$$h_{Hg} = \frac{p_a}{\gamma_{Hg}} = \frac{101337{,}3\,Pa}{133{,}3768\,kN/m^3} = \frac{101{,}3373\,kN/m^2}{133{,}3768\,kN/m^3} = 0{,}76\ m\,Hg$$

Η πίεση στο Αγγλικό σύστημα μονάδων

Όπως είναι γνωστό, στο αγγλικό σύστημα μονάδων αντί του Νιούτον χρησιμοποιείται η λίβρα ή λίμπρα (lb) και αντί του τετραγωνικού εκατοστού η τετραγωνική ίντσα (in^2 ή sq.in.). Επομένως στο σύστημα αυτό μονάδα πίεσης είναι η μία λίμπρα ανά τετραγωνική ίντσα η οποία και γράφεται ως 1 lb/in^2 ή 1 lb/sq.in και απλούστερα 1psi (από τον αγγλικό όρο - φράση: pound per square inch = λίμπρα ανά τετραγωνική ίντσα).

Για την μετατροπή των μονάδων πίεσης από το ένα σύστημα στο άλλο χρησιμοποιείται η σχέση: 1psi = 0,454x9,81 N/($0{,}0254^2$ m^2) = 6903,31 Pa. Η μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης γίνεται με τα βαρόμετρα[4].

Πρώτος που μέτρησε την πίεση αυτή, του βάρους του αέρα, ήταν ο Εβαντζελίστα Τοριτσέλλι (*Evangelista Torricelli*), ο οποίος και βρήκε ότι στην επιφάνεια της θάλασσας και με ορισμένες ατμοσφαιρικές συνθήκες, η πίεση του αέρα προκαλούσε την ανύψωση μια στήλης υδρα ργύρου (Hg) σε ύψος 760 mm, ή 76 cm, ή 29,93΄΄ (ιντσών), δηλαδή:

1 atm = 760 χιλιοστά στήλης υδραργύρου = 760 mm Hg.

Σήμερα στις τεχνικές εφαρμογές η εν λόγω μονάδα "φυσική ατμόσφαιρα" δεν χρησιμοποιείται ευρύτατα επειδή είναι δύσχρηστη στους υπολογισμούς. Αντί αυτής χρησιμοποιείται η "τεχνική ατμόσφαιρα" που ισούται με 1 Kp/cm^2 και συμβολίζεται με 1 at. Για τις at και atm ισχύουν οι σχέσεις: 1 at = 1 kp/cm^2 = 9810 N/ cm^2 = 98100 Pa =735,51 mm Hg = 0,968 atm και 1 atm = 1,033 at =10133,73 N/ cm^2 =101337,30 Pa =760 mm Hg

[4] Η ατμοσφαιρική ή βαρομετρική πίεση μεταβάλλεται «οριζόντια» και «κατακόρυφα» τόσο από τόπο σε τόπο, όσο και από χρόνο σε χρόνο παρατήρησης. Οι «οριζόντιες μεταβολές» είναι πολύ μικρότερες από τις «κατακόρυφες μεταβολές» πλην όμως έχουν εξαιρετική σημασία στη δημιουργία των καιρικών φαινομένων, όπως π.χ. οι άνεμοι, είναι αποτέλεσμα αυτών των μεταβολών.

Εκτός των παραπάνω παρατηρείται κατά τη διάρκεια του 24ώρου, υπό ομαλή βεβαίως καιρική κατάσταση και η «ημερήσια μεταβολή» κατά την οποία η ατμοσφαιρική πίεση παρουσιάζει «διπλή κύμανση» με μέγιστη τιμή κατά τις ώρες 10.00 και 22.00, και ελάχιστη κατά τις ώρες 04.00 και 16.00. Το κύριο εύρος (διαφορά) αυτών είναι μικρό, 3,0 mmHg στον Ισημερινό και 1,5 mm Hg στις εύκρατες περιοχές. Δηλαδή καθώς αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος, αυτή ελαττώνεται. Η σημασία της ημερήσιας βαρομετρικής μεταβολής στα τροπικά πλάτη είναι μεγάλη. Η διαταραχή στην πορεία της ημερήσιας μεταβολής της ατμοσφαιρικής πίεσης αποτελεί για τους ναυτικούς τη πρώτη ένδειξη προσέγγισης τροπικού κυκλώνα. Η «ημερήσια μεταβολή» της ατμοσφαιρικής πίεσης παρακολουθείται από το διάγραμμα του αυτογραφικού βαρόμετρου – Βαρογράφου.

Το φαινόμενο της «ημερήσιας μεταβολής» της ατμοσφαιρικής πίεσης ονομάζεται βαρομετρική παλίρροια

Στην πράξη χρησιμοποιείται περισσότερο, αντί του όρου ατμοσφαιρική πίεση, ο όρος βαρομετρική ως επίθετο επειδή περιέχει την έννοια της πίεσης.

2.4 ΜΕΤΡΗΣΗ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΠΙΕΣΕΩΝ - ΜΑΝΟΜΕΤΡΑ

Η μέτρηση της υδροστατικής πίεσης γίνεται με ειδικά όργανα, τα οποία λέγονται μανόμετρα και τα οποία στηρίζονται στην αρχή της εξισορρόπησης της μετρούμενης πίεσης με στήλη υγρού σε ισορροπία. Τα μανόμετρα διακρίνονται σε διάφορους τύπους ή κατηγορίες ανάλογα με το σχήμα τους, το χρησιμοποιούμενο απ' αυτά υγρό, τον τρόπο λειτουργίας τους, την ένταση της μετρούμενης πίεσης, κλπ.

2.4.1 Απλά μανόμετρα.

Το απλό μανόμετρο, αποτελείται από ένα γυάλινο σωλήνα που μπορεί να προσαρμοστεί κατακόρυφα σε ένα σημείο σωλήνα ή δοχείου γεμάτου με υγρό για τη μέτρηση της πίεσής του.

Το υγρό του σωλήνα, ή δοχείου, ανέρχεται μέσα στο σωλήνα του πιεζόμετρου έως ότου αποκατασταθεί ισορροπία.

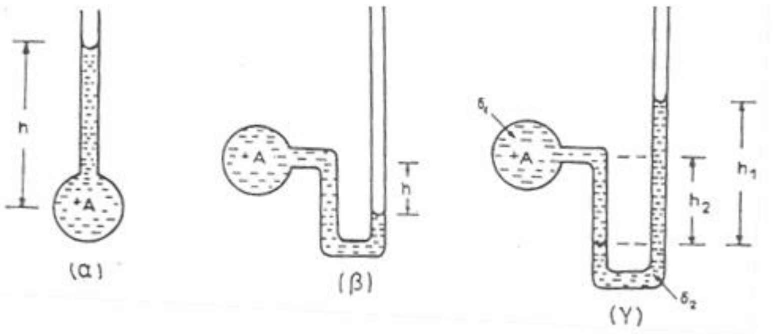
Η ένταση της πίεσης δίνεται από την εξίσωση:

$p_A = p_\alpha + \gamma.\ h$ (απόλυτη πίεση στο A) ή $p_A - p_\alpha = \gamma.\ h$ (σχετική πίεση στο A)

όπου $h = (p_A - p_\alpha)/\gamma$ = το ύψος της στήλης του υγρού μεταξύ του μηνίσκου και του οριζόντιου επίπεδου που περνά από το σημείο A.

Είναι προφανές ότι αυτός ο τύπος πιεζόμετρου χρησιμοποιείται μόνο για τη μέτρηση θετικών πιέσεων, δηλαδή πιέσεων μεγαλύτερων της ατμοσφαιρικής.

Επίσης ο τύπος αυτός του πιεζόμετρου είναι πρακτικά ακατάλληλος γα τη μέτρηση υψηλών πιέσεων στο σημείο A διότι απαιτεί μεγάλα ύψη κατακόρυφων σωλήνων.



Για τη μέτρηση μικρών αρνητικών ή θετικών σχετικών πιέσεων στα υγρά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του διπλού ανοικτού μανόμετρου.

Στην περίπτωση αρνητικής πίεσης στο σημείο A, ο μηνίσκος του μανόμετρου βρίσκεται κάτω από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το A.

Η πίεση στο σημείο A δίνεται από την εξίσωση:

$p_A + \gamma.h = p_\alpha$ (απόλυτη πίεση στο A) ή $p_A - p_\alpha = -\gamma h$ (σχετική πίεση στο A)

Για μεγαλύτερες αρνητικές ή θετικές σχετικές πέσεις χρησιμοποιείται ο τύπος του απλού ανοιχτού μανομέτρου, με βαρύτερο υγρό.

Το υγρό που χρησιμοποιείται μέσα στο λυγισμένο σωλήνα, έχει μεγαλύτερη ειδική πυκνότητα και δεν πρέπει να αναμειγνύεται με το ρευστό του δοχείου, το οποίο μπορεί τώρα να είναι υγρό ή αέριο.

Εάν η σχετική πυκνότητα του ρευστού στο σημείο Α είναι ρ_1 και η σχετική πυκνότητα του υγρού του μανομέτρου είναι ρ_2, η εξίσωση που δίνει την ένταση της πίεσης στο σημείο Α είναι.

$p_A + \gamma_1.h_2 - \gamma_2.h_1 = p_\alpha$ (απόλυτη πίεση στο Α)

ή ακόμη

$p_A = \gamma_2.h_1 - \gamma_1.h_2$ (σχετική πίεση στο Α)

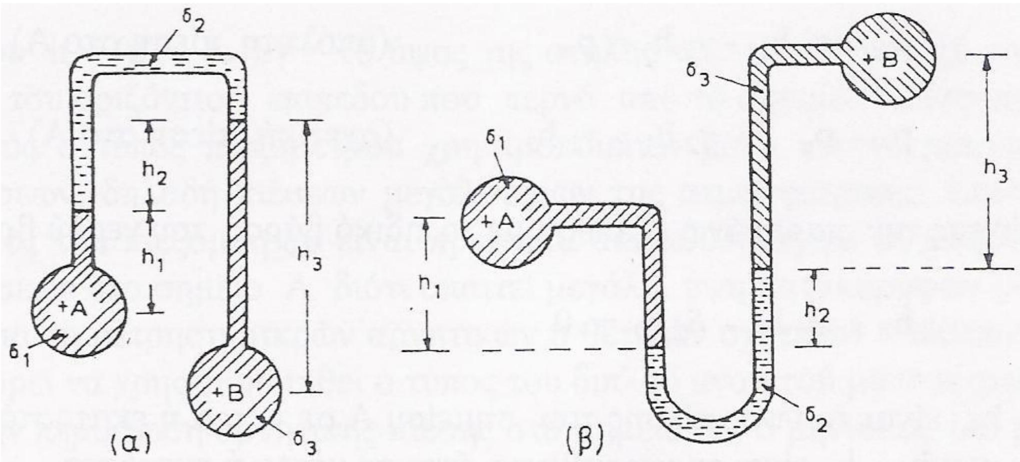
Διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με το ειδικό βάρος του νερού προκύπτει:

$h_A = \rho_2.h_1 - \rho_1.h_2$ ή $h_A + \rho_1.h_2 - \rho_2.h_1 = 0$

όπου h_A είναι το ύψος πίεσης του σημείου Α σε μέτρα ή εκατοστά στήλης νερού και h_1, h_2 είναι τα μετρημένα ύψη σε μέτρα ή εκατοστά.

2.4.2 Διαφορικά Μανόμετρα

Ένα διαφορικό μονόμετρο προσδιορίζει τη διαφορά των πιέσεων μεταξύ δύο σημείων Α και Β όταν οι πραγματικές πιέσεις δεν είναι γνωστές.



Η εφαρμογή της παραπάνω γενικής πορείας υπολογισμού στα διαφορικά μανόμετρα, θα δίνει τη διαφορά των πιέσεων μεταξύ δύο σημείων Α και Β.

2.4.3 Επίλυση των προβλημάτων των μανομέτρων

Για την επίλυση των προβλημάτων των μανομέτρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω γενική πορεία:

1. Αρχίζομε από το ένα άκρο, ή οποιονδήποτε μηνίσκο αν το κύκλωμα είναι συνεχές) και γράφομε την ένταση της πίεσης με το κατάλληλο σύστημα μονάδων (π.χ. σε μέτρα νερού ή με ένα κατάλληλο σύμβολο (p_A ή h_A), αν αυτή είναι άγνωστη).

2. Προσθέτουμε σ' αυτήν αλγεβρικά τη μεταβολή της έντασης της πίεσης, με το ίδιο σύστημα μονάδων, από τον ένα μηνίσκο στον άλλον με πρόσημο συν (+) αν ο επόμενος μηνίσκος είναι χαμηλότερα, και με πρόσημο μείον (-) αν είναι ψηλότερα.

3. Συνεχίζουμε μέχρι να φτάσουμε στο άλλο άκρο του οργάνου (ή στον αρχικό μηνίσκο) και εξισώνουμε την όλη έκφραση με την πίεση σ' αυτό το σημείο, γνωστή ή άγνωστη. Η εξίσωση θα περιέχει έναν άγνωστο για τα απλά μανόμετρα, ή θα δίνει τη διαφορά των πιέσεων μεταξύ δύο σημείων, για τα διαφορικά μανόμετρα.

2.5 ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΕΣ ΠΙΕΣΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

2.5.1 Οριζόντιες επίπεδες επιφάνειες

Μιά επίπεδη επιφάνεια, βυθισμένη οριζόντια μέσα σε υγρό σε βάθος h, υπόκειται σε μία σταθερή ένταση πίεσης, δηλαδή $p = \gamma h$ = σταθερή. Η ολική δύναμη της σχετικής υδροστατικής πίεσης, η οποία επενεργεί πάνω στη μία πλευρά της οριζόντιας επιφάνειας Ε θα είναι:

$$P = \int_E p dE = \int_E \gamma h dE = \gamma h E$$

δηλαδή είναι ίση με το βάρος στήλης του υγρού, η οποία έχει βάση τη θεωρούμενη οριζόντια επιφάνεια και ύψος την απόστασή της από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Η διεύθυνση της δύναμης Ρ είναι κάθετη πάνω στην επιφάνεια και το σημείο εφαρμογής της συμπίπτει με το κέντρο βάρους Κ της επιφάνειας Ε.

2.5.2 Κεκλιμένες επίπεδες επιφάνειες.

Έστω ένα κεκλιμένο επίπεδο τοίχωμα ΑΒΓΔ, βυθισμένο μέσα σε ένα υγρό και ζητείται να προσδιοριστεί η ένταση, η διεύθυνση και το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης Ρ, που οφείλεται στην υδροστατική πίεση του υγρού, πάνω σε ένα τμήμα με επιφάνεια Ε της εσωτερικής παρειάς του τοιχώματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.

Αν ληφθεί ως επίπεδο σύγκρισης η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού Χ΄Ο Ψ, η οποία σχηματίζει γωνία φ με το επίπεδο ΧΨ της εσωτερικής παρειάς του τοιχώματος, ο άξονας Ζ έχει τη διεύθυνση της βαρύτητας.

Η δύναμη της υδροστατικής πίεσης πάνω σε μία στοιχειώδη λωρίδα dE της επιφάνειας Ε, η οποία διέρχεται από το σημείο Θ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ψ είναι:

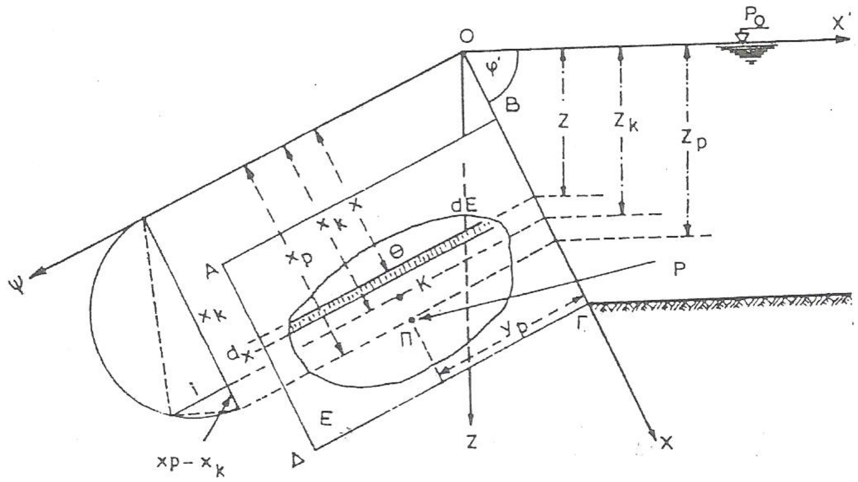
$dP = p\ dE = \gamma\ z\ dE = \gamma\ x\ \eta\mu\varphi\ dE$

Επειδή όλες οι στοιχειώδεις δυνάμεις dP είναι παράλληλες μεταξύ τους ως κάθετες πάνω στο ίδιο επίπεδο, είναι δυνατή η ολοκλήρωση της εξίσωσης σε ολόκληρη την επιφάνεια Ε. Έτσι η ολική δύναμη πίεσης πάνω στην επιφάνεια Ε θα είναι:

$P = \int dP = \gamma\ \eta\mu\varphi \int_E x\ dE = \gamma\ \eta\mu\varphi\ M_\psi = \gamma\ x_k\ \eta\mu\ \varphi\ E$

και επειδή $z_k = x_k\ \eta\mu\ \varphi$, η εξίσωση γράφεται:

$P = \gamma\ z_k$ E



Σχήμα 2.1 Υδροστατική πίεση πάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια

Στην παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιήθηκε ο γνωστός ορισμός της στατικής ροπής, $M_\psi = \int_E x\ dE = x_k\ E$, της επιφάνειας Ε ως προς τον άξονα Ψ. Επίσης x_k και z_k είναι οι αποστάσεις του κέντρου βάρους Κ της επιφάνειας Ε από τον άξονα Ψ και την ελεύθερη επιφάνεια, αντίστοιχα.

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η ένταση της συνισταμένης δύναμης των υδροστατικών πιέσεων πάνω σε μία κεκλιμένη επιφάνεια Ε, ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί την υδροστατική πίεση πάνω στο κέντρο βάρους της, ή διαφορετικά, ισούται με το βάρος στήλης του υγρού που έχει βάση την επιφάνεια Ε και ύψος την κατακόρυφη απόσταση του κέντρου βάρους της Ε από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

2.5.2.1 Το κέντρο πίεσης

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης των υδροστατικών πιέσεων ονομάζεται κέντρο πίεσης.

Το κέντρο πίεσης στην περίπτωση των κεκλιμένων επιπέδων επιφανειών δεν συμπίπτει με το κέντρο βάρους της επιφάνειας, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των οριζοντίων επιφανειών.

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του κέντρου πίεσης, παίρνονται οι ροπές της συνισταμένης δύναμης πιέσεων P και εξισώνονται με τα αθροίσματα (ολοκληρώματα) των ροπών των συνιστωσών στοιχειωδών δυνάμεων πιέσεων ως προς τους άξονες Ψ και Χ οπότε προκύπτουν:

$$x_p = \frac{1}{p}\int_E x^2 dE = \frac{Jy}{x_k E}$$

$$y_p = \frac{1}{p}\int_E xy dE = \frac{Jxy}{y_k E}$$

όπου $J_y = \int_E x^2 dE$ είναι η ροπή αδρανείας της επιφάνειας Ε ως προς τον άξονα Ψ και

$J_{xy} = \int_E xy dE$ είναι η φυγόκεντρη ροπή της επιφάνειας Ε ως προς τους άξονες Χ και Ψ.

Επειδή σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner είναι:

$J_y = J_y^0 + x_k^2 E$ και $J_{xy} = J_{xy}^0 + x_k y_k E$ προκύπτει ότι:

$$x_p = x_k + \frac{J_y^0}{x_k E} \quad \text{και}$$

$$y_p = y_k + \frac{J_{xy}^0}{y_k E}$$

όπου x_k, y_k είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

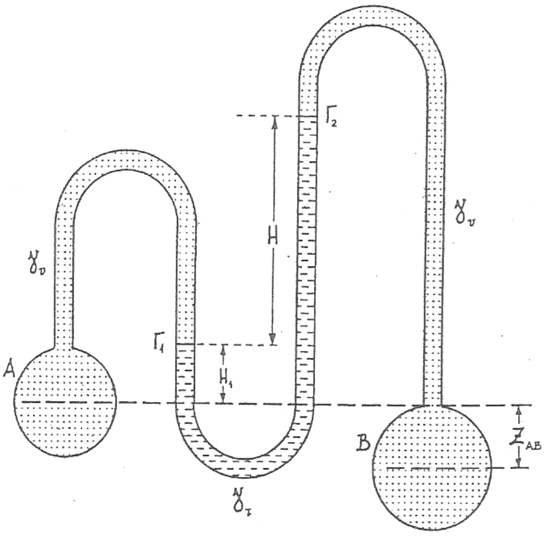
Επειδή στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, οι πιεζόμενες επιφάνειες έχουν έναν άξονα συμμετρίας, τον οποίο παίρνουμε σαν άξονα x, προκύπτει $J_{xy} = 0$ και συνεπώς $y_p = 0$, δηλαδή το κέντρο πίεσης πέφτει πάνω στον άξονα συμμετρίας και συνεπώς δεν απομένει παρά να προσδιοριστεί το x_p.

Από τις εξισώσεις βλέπουμε ότι το κέντρο πίεσης μιας κεκλιμένης επιφάνειας βρίσκεται πάντοτε χαμηλότερα από το κέντρο βάρους της κατά την ποσότητα $\frac{J_y^0}{x_k E}$. Όσο βαθύτερα βρίσκεται το κέντρο βάρους της Ε τόσο πιο κοντά του βρίσκεται το κέντρο πίεσης και θεωρητικά για $x_k \to \infty$ προκύπτει $x_p \equiv x_k$.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν και για τις κατακόρυφες επίπεδες επιφάνειες, για τις οποίες είναι $\varphi = 90^o \Rightarrow$ ημφ = 1 και επομένως $x_p = z_p$ και $x_k = z_k$.

2.6 Λυμένες ασκήσεις

2.6.1 Η μανομετρική συσκευή του σχήματος χρησιμοποιείται για την μέτρηση της διαφοράς πιέσεων μεταξύ δύο δοχείων νερού Α και Β. Ως μανομετρικό υγρό χρησιμοποιείται χρωματισμένος τετραχλωριούχος άνθρακας ειδικού βάρους γ_τ = 1,6 gr*/cm^3. Να εκφραστεί η διαφορά πιέσεων p_A - p_B συναρτήσει των υψών Η και Z_{AB} και των ειδικών βαρών του νερού και τετραχλωριούχου άνθρακα. (Για την αριθμητική εφαρμογή: Z_{AB} = 0 και Η = 0,60 m.)



Λύση

Για το νερό του δοχείου Α και τη διαχωριστική επιφάνεια Γ_1 (σύστημα Α - Γ_1), παίρνοντας σαν επίπεδο αναφοράς το επίπεδο που περνάει από το κέντρο του σφαιρικού δοχείου Α έχομε :

$$\frac{p_A}{\gamma_\upsilon} + 0 = \frac{p_{\Gamma_1}}{\gamma_\upsilon} + H_1 \qquad (1)$$

Για τον τετραχλωριούχο άνθρακα και τις διαχωριστικές επιφάνειες Γ_1 και Γ_2 (σύστημα Γ_1 - Γ_2), παίρνοντας σαν επίπεδο αναφοράς το επίπεδο που περνάει από τη διαχωριστική επιφάνεια Γ_1 έχομε :

$$\frac{p_{\Gamma_1}}{\gamma_\tau} + 0 = \frac{p_{\Gamma_2}}{\gamma_\tau} + H \qquad (2)$$

Τέλος για το νερό του δοχείου Β και τη διαχωριστική επιφάνεια Γ_2 (σύστημα Γ_2 -- Β), παίρνοντας σαν επίπεδο αναφοράς το επίπεδο που περνάει από τη διαχωριστική επιφάνεια Γ_2 έχομε :

$$\frac{p_{\Gamma_2}}{\gamma_\upsilon} + 0 = \frac{p_B}{\gamma_\upsilon} - (H + H_1 + Z_{AB}) \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι :

$$p_A = p_{\Gamma_1} + \gamma_\upsilon H_1 \qquad (1')$$

$$p_{\Gamma_1} = p_{\Gamma_2} + \gamma_\tau H \qquad (2')$$

$$p_{\Gamma_2} = p_B - \gamma_\upsilon (H + H_1 + Z_{AB}) \qquad (3')$$

Αν οι εξισώσεις (1΄) (2΄) και (3΄) προστεθούν κατά μέλη προκύπτει :

$p_A = \gamma_\upsilon H_1 + \gamma_\tau H + p_B - \gamma_\upsilon (H + H_1 + Z_{AB})$ οπότε:

$$\boxed{p_A - p_B = (\gamma_\tau - \gamma_\upsilon) H - \gamma_\upsilon Z_{AB}}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

$$p_A - p_B = (1{,}60 \frac{gr*}{cm^3} - 1 \frac{gr*}{cm^3}) \cdot 60\,cm = 36 \frac{gr*}{cm^2}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει, αν ακολουθηθεί η γενική πορεία που περιγράφεται στα απλά μανόμετρα.

Είναι:

$$p_A - \gamma_\upsilon H_1 - \gamma_\tau H + \gamma_\upsilon (H + H_1 + Z_{AB}) = p_B \Rightarrow \quad p_A - p_B = (\gamma_\tau - \gamma_\upsilon) H - \gamma_\upsilon Z_{AB}$$

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

1. Μενέλαος Θεοχάρης, “ΑΡΔΕΥΣΕΙΣ”, Τ.Ε.Ι. Ηπείρου, Άρτα, 2012.
2. Μενέλαος Θεοχάρης, “Η ΑΡΔΕΥΣΗ ΜΕ ΣΤΑΓΟΝΕΣ”, Τ.Ε.Ι. Ηπείρου, Άρτα, 1998.
3. Θεοχάρης Μ.: " Αρδεύσεις - Στραγγίσεις ", Άρτα 1998
4. Θεοχάρης Μ.: " Η Άρδευση με Σταγόνες ", Άρτα 1998
5. Θεοχάρης Μ.: " Αρδεύσεις - Στραγγίσεις , Εργαστηριακές Ασκήσεις", Άρτα 1998
6. Καρακατσούλης Π. : " Αρδεύσεις - Στραγγίσεις και Προστασία των Εδαφών ", Αθήνα 1993.
7. Κωνσταντινίδης Κ. : "Η μέθοδος αρδεύσεως δια καταιονήσεως ", Θεσσαλονίκη - Αθήνα 1975.
8. Μιχελάκης Ν. : "Συστήματα Αυτόματης Άρδευσης - Άρδευση με Σταγόνες"
9. Daugerty - Franzini : "Υδραυλική" Τόμοι Ι , ΙΙ, Εκδόσεις Πλαίσιο , Αθήνα.
10. Davis- Sorensen :" Handbook of applied Hydraulics" Third edition McGraw-Hill Book Company, 1969.
11. Ουζούνης Δ. "Θεωρητική και Πρακτική Μέθοδος της Άρδευσης με Σταγόνες" Εκδόσεις Γαρταγάνη, Θεσσαλονίκη 1997.
12. Τερζίδης Γ. : "Μαθήματα Υδραυλικής " , Τόμοι Ι ,ΙΙ , ΙΙΙ, Θεσσαλονίκη 1986.
13. Τερζίδης Γ. - Παπαζαφειρίου Ζ. : " Γεωργική Υδραυλική " Εκδόσεις Ζήτη , Θεσσαλονίκη 1997.
14. Τζιμόπουλος Χ. : " Γεωργική Υδραυλική ", Τόμοι Ι , ΙΙ, Εκδόσεις Ζήτη , Θεσ-σαλονίκη 1982.
15. Τσακίρης Γ. : "Μαθήματα Εγγειοβελτιωτικών Έργων ", Αθήνα
16. Hansen V. - Israelsen : "Αρδεύσεις. Βασικοί Αρχαί και Μέθοδοι . Μετάφραση από τους Α. Νικολαΐδη και Α. Κοκκινίδη ", Αθήνα 1968.

Σημείωμα Αναφοράς

Θεοχάρης Μενέλαος, (2015). Αρδεύσεις (Εργαστήριο). ΤΕΙ Ηπείρου. Διαθέσιμο από:
http://eclass.teiep.gr/courses/TEXG110/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Επεξεργασία: Δημήτριος Κατέρης

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης