



Ελληνική Δημοκρατία  
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό  
Ίδρυμα Ηπείρου

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ενότητα 10 : Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων Γενικά  
Κωνσταντίνος Αγγέλης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



## Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ενότητα 10: Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων Γενικά

Κωνσταντίνος Αγγέλης  
Καθηγητής  
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Σκοποί ενότητας

- Κατανόηση της λειτουργίας των φίλτρων
- Χρήση των φίλτρων για απομάκρυνση του θορύβου



# Περιεχόμενα ενότητας

- **Κρουστική Απόκριση**
- **Γ.Ε.Δ.Σ.Σ.**
- **Φίλτρα**
- **Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης**
- **Επίλυση ΓΕΔΣΣ FIR Φίλτρων**
- **Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- **Ψηφιακό Δικτύωμα**
- **Κλάδοι και Κόμβοι**

# Κρουστική Απόκριση

- Η είσοδος  $x(n)$  και η έξοδος  $y(n)$  ενός συστήματος γραμμικού αμετάβλητου κατά τη μετατόπιση (Linear Time Invariant – LTI) συνδέονται με τη σχέση:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

όπου  $h(n)$  είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο  $x(n) = \delta(n)$

# Κρουστική Απόκριση

Συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά:

Αν ένα σύστημα  $w(n)=x(n)*h_1(n)$  και σε σειρά συνδεθεί σύστημα  $y(n)=w(n)*h_2(n)$  τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$ , έξοδο  $y(n)$  και κρουστική απόκριση

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)$$

όπου  $y(n)=x(n)*h(n)$

# Κρουστική Απόκριση

Συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα:

Αν ένα σύστημα  $w(n)=x(n)*h_1(n)$  συνδεθεί παράλληλα με ένα σύστημα  $v(n)=x(n)*h_2(n)$  προσθέτοντας τις εξόδους των φίλτρων, δηλαδή:

$$y(n)=w(n)+v(n)$$

τότε το συνολικό σύστημα έχει είσοδο  $x(n)$ , έξοδο  $y(n)$  και κρουστική απόκριση  $h(n)=h_1(n)+h_2(n)$  όπου  $y(n)=x(n)*h(n)$



# Γ.Ε.Δ.Σ.Σ.

- Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (φίλτρο) περιγράφεται με μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές (ΓΕΔΣΣ):

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^N a(k)y(n-k)$$

- Η κρουστική απόκριση του φίλτρου  $h(n)$  είναι η λύση της εξίσωσης διαφορών για  $x(n)=\delta(n)$

# Φίλτρα

Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα φίλτρα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το μήκος της κρουστικής τους απόκρισης:

- τα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης  
(Finite-duration Impulse Response – FIR)
- τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης  
(Infinite-duration Impulse Response – IIR)

# Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

Τα **FIR** φίλτρα περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών:

Moving Average (**MA**) 
$$y(n) = \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k)$$

Κρουστική Απόκριση φίλτρων **FIR**

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b(k)\delta(n-k)$$

# Φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης

Τα **IIR** φίλτρα περιγράφονται από τις εξισώσεις διαφορών:

$$\text{Auto Regressive (AR)} \quad y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N a(k)y(n-k)$$

Auto Regressive Moving Average (**ARMA**)

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^N a(k)y(n-k)$$

# Επίλυση ΓΕΔΣΣ FIR Φίλτρων

Υπολογισμός της  
κρουστικής απόκρισης  $h(n)$ :  
 $y(n)=x(n)*h(n)$

Παράδειγμα

Αν  $y(n)=x(n)-x(n-2)$

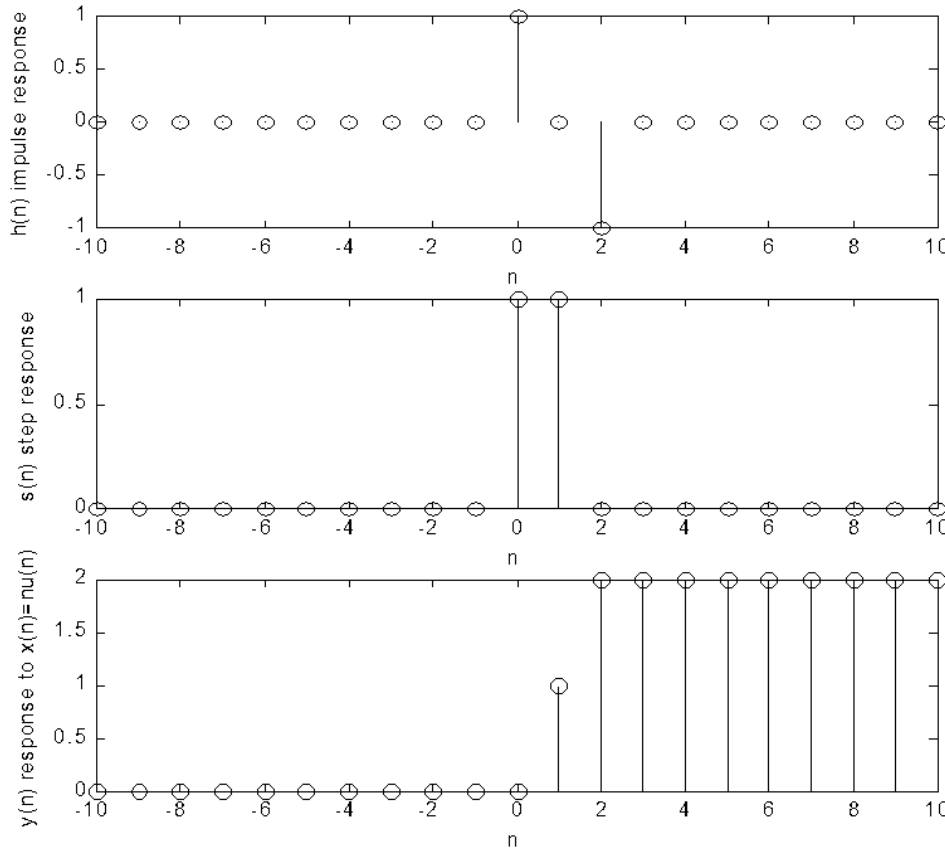
και  $x(n)=n \cdot u(n)$

Τότε  $h(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$

και

$y(n)=n \cdot u(n)-(n-2) \cdot u(n-2)=x(n)*h(n)$

# Επίλυση ΓΕΔΣΣ FIR Φίλτρων



Η κρουστική  
απόκριση του  
σήματος του  
προηγούμενου  
παραδείγματος

# Επίλυση ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρων

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n)$$

Η μερική λύση  $y_p(n)$  ικανοποιεί τη ΓΕΔΣΣ για τη δεδομένη είσοδο  $x(n)$  με μηδενικές αρχικές συνθήκες

Η ομογενής λύση  $y_h(n)$  αντιστοιχεί στην απόκριση του φίλτρου για μηδενική είσοδο  $x(n)=0$  με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες

# Επίλυση ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρων

Όρος στην είσοδο $x(n)$	Μερική Λύση
$c$	$c1$
$c \cdot n$	$c1 \cdot n + c2$
$c \cdot a^n$	$c1 \cdot a^n$
$c \cdot \cos(\omega n)$	$c1 \cdot \cos(\omega n) + c2 \cdot \sin(\omega n)$
$c \cdot \sin(\omega n)$	$c1 \cdot \cos(\omega n) + c2 \cdot \sin(\omega n)$
$c \cdot \delta(n)$	$0$



# Επίλυση ΓΕΔΣΣ IIR Φίλτρων

Ομογενής Λύση:  $y_h(n) = z^n$

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο:

$$z^N + a(1)z^{N-1} + a(2)z^{N-2} + \dots + a(N-1)z + a(N) = 0$$

Αν το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο έχει απλές ρίζες, τότε:

$$y_h(n) = A_k z_k^n$$

Οι συντελεστές  $A_k$  υπολογίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες

# Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

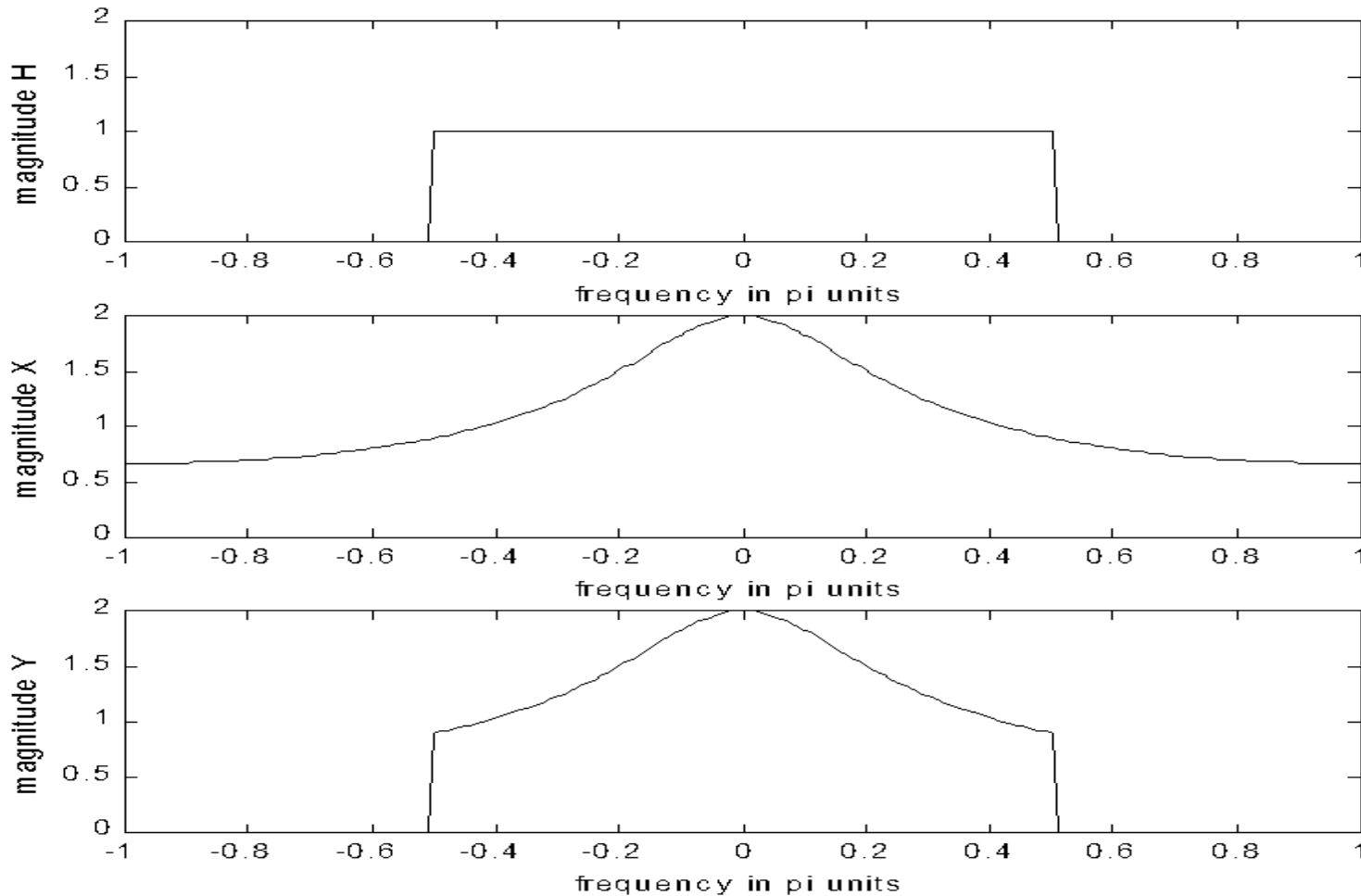
Τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων έχουν κατά τμήματα σταθερό πλάτος απόκρισης συχνότητας

- χαμηλοπερατά φίλτρα (Low Pass)  $H(e^{j\omega})=1$  για  $\omega \in [-\omega_c, \omega_c]$  όπου  $0 < \omega_c < \pi$
- υψηλοπερατά φίλτρα (High Pass)  $H(e^{j\omega})=1$  για  $\omega \in [-\omega_c, \omega_c]$  όπου  $0 < \omega_c < \pi$

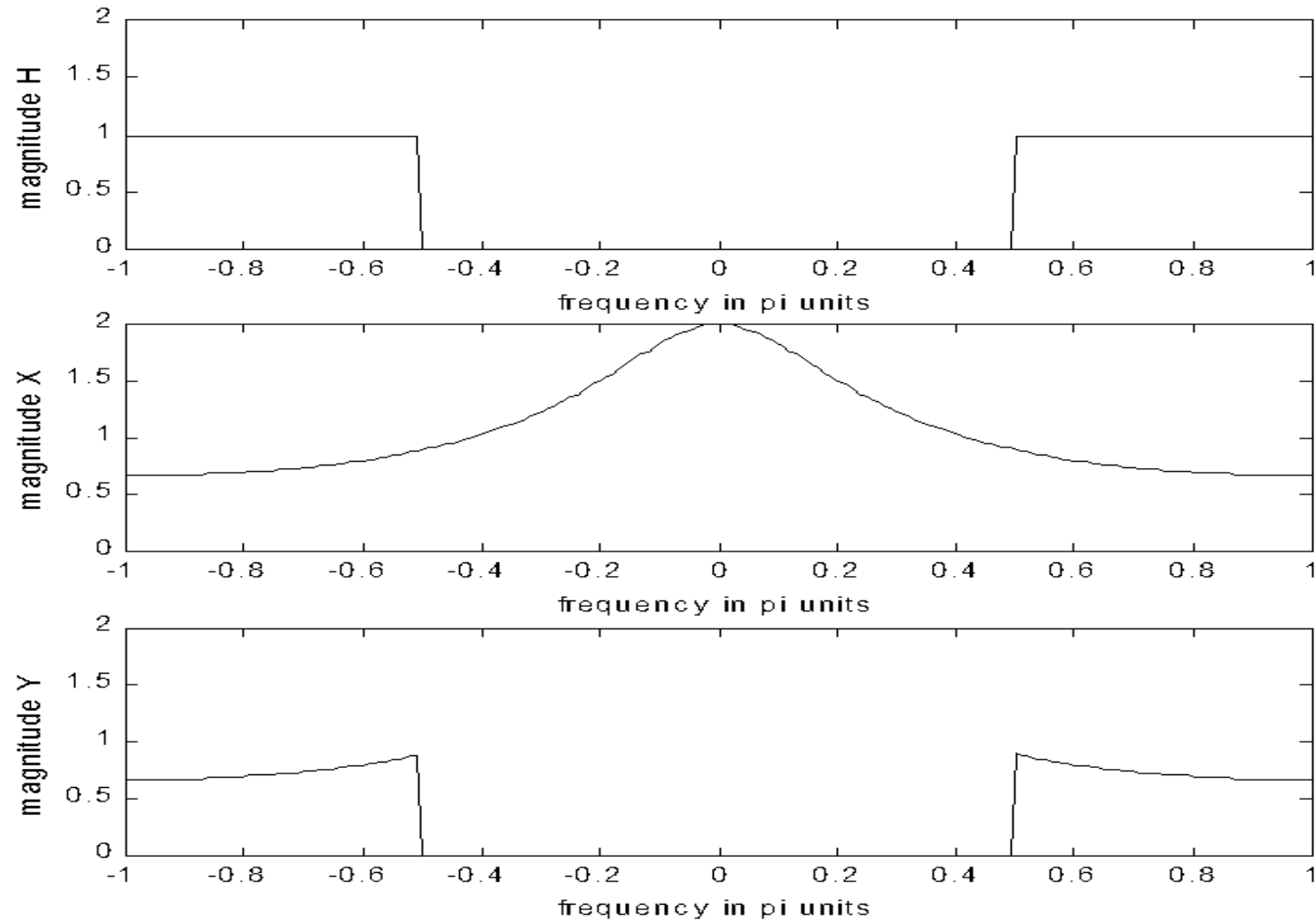
# Ψηφιακό Δικτύωμα

- ζωνοπερατά φίλτρα (Band Pass)  $H(e^{j\omega})=1$   
για  $\omega \in [-\omega_2, -\omega_1]$  και για  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$   
με  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$
- ζωνοφρακτικά φίλτρα (Band Stop)  $H(e^{j\omega})=1$   
για  $\omega \in [-\omega_2, -\omega_1]$  και για  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  με  
 $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$

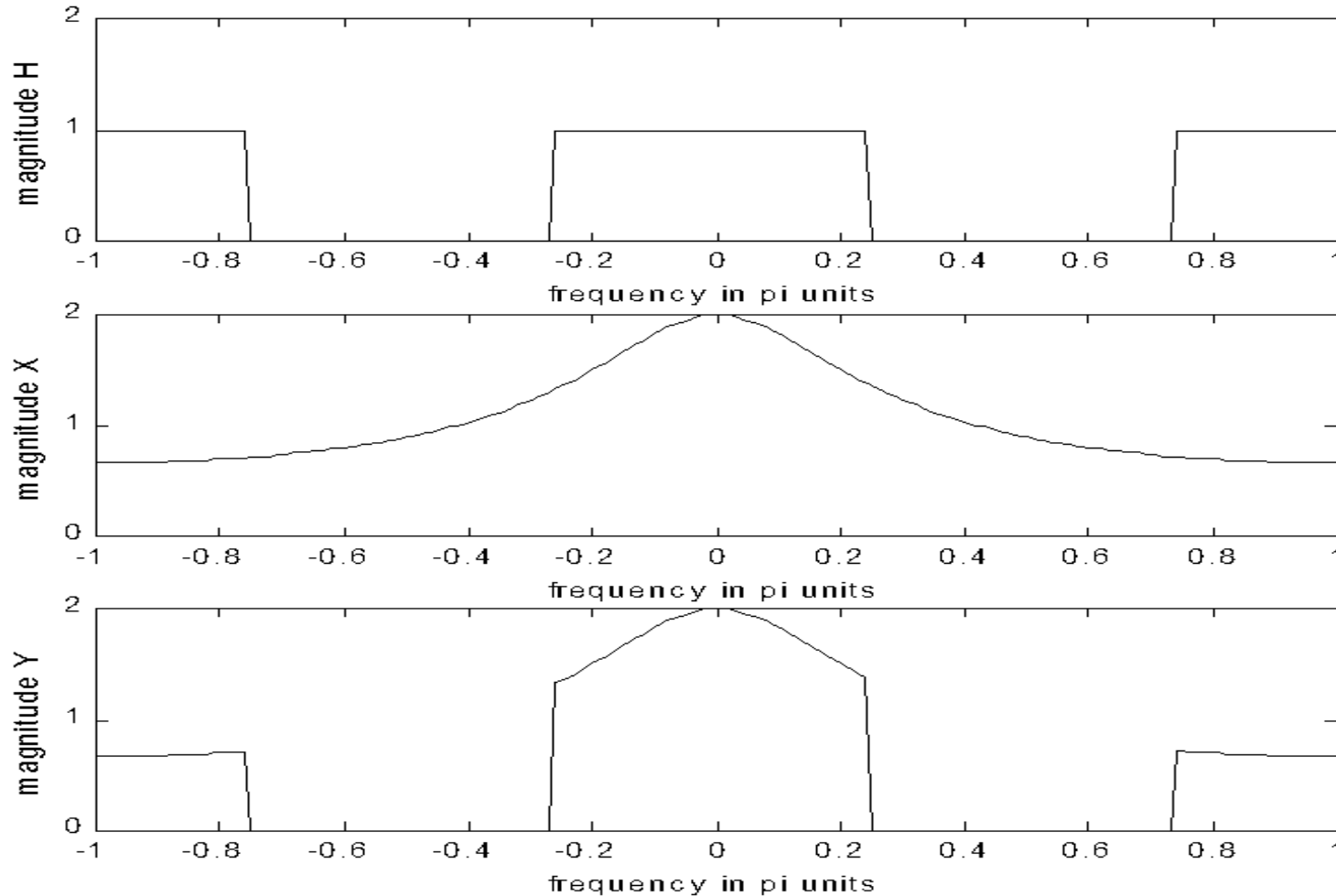
# Χαμηλοπερατά φίλτρα (Low Pass)



# Υψηπερατά φίλτρα (High Pass)

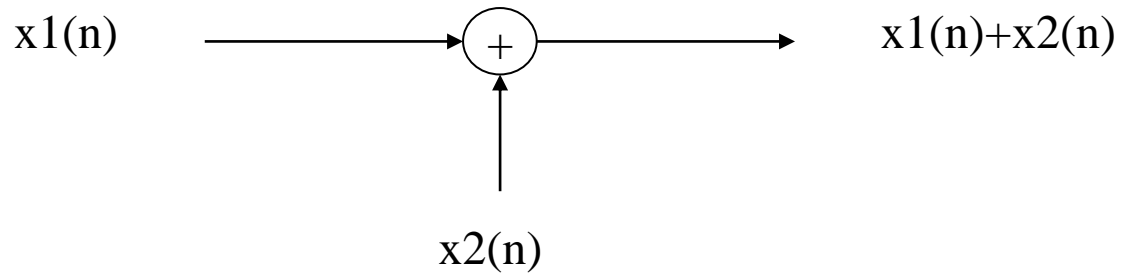


# Ζωνοπερατά φίλτρα (Band Pass)

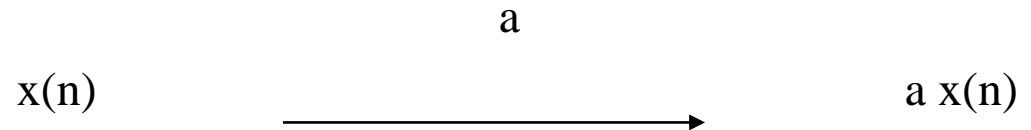


# Βασικά Δομικά Στοιχεία

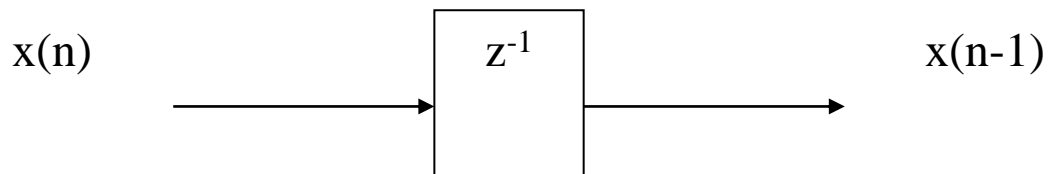
- Αθροιστής



- Πολλαπλασιαστής



- Καθυστέρηση



# Ψηφιακό Δικτύωμα

Από τον τρόπο υλοποίησης ενός συστήματος διακριτού χρόνου εξαρτάται:

- Το πλήθος των υπολογισμών
- Το πλήθος των θέσεων μνήμης
- Η ευαισθησία του φίλτρου ως προς τον κβαντισμό των συντελεστών
- Η ευαισθησία του φίλτρου ως προς το θόρυβο στρογγυλοποίησης που εμφανίζεται στην έξοδο του φίλτρου



# Ψηφιακό Δικτύωμα

- Ένα ψηφιακό δικτύωμα μπορεί να παρασταθεί με ένα διάγραμμα ροής σήματος (signal flowchart) που αποτελείται από κλάδους που συνδέονται με κόμβους (nodes).

# Κλάδοι και Κόμβοι

## Κλάδοι

- Κάθε κλάδος έχει μια είσοδο και μια έξοδο
- Η κατεύθυνση σημειώνεται με ένα βέλος
- Η έξοδος είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός της εισόδου
- Ο γραμμικός τελεστής σημειώνεται δίπλα στο βέλος και είναι πολλαπλασιαστής ή καθυστερητής

# Κλάδοι και Κόμβοι

## Κόμβοι

- Κόμβος πηγής (source node): χρησιμοποιείται για είσοδο, εμφανίζεται εξερχόμενος κλάδος
- Κόμβος απαγωγής (sink node): χρησιμοποιείται για έξοδο, εμφανίζεται εισερχόμενος κλάδος
- Αθροιστής: κόμβος όπου καταλήγουν περισσότεροι από ένας κλάδος
- Σημείο διακλάδωσης: κόμβος από τον οποίο αποχωρούν περισσότεροι από ένας κλάδοι



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/>





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή  
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

## Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων Γενικά



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΙΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ