



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ενότητα 11 : Φίλτρα FIR με χρήση παραθύρων
Κωνσταντίνος Αγγέλης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ενότητα 11: Φίλτρα FIR με χρήση παραθύρων

Κωνσταντίνος Αγγέλης
Καθηγητής
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Σκοποί ενότητας

- Εξάσκηση στη σχεδίαση φίλτρων με χρήση παραθύρων



Περιεχόμενα ενότητας

- Σχεδίαση FIR φίλτρων γραμμικής φάσης με χρήση παραθύρου
- Προδιαγραφές πραγματοποιήσιμου LP φίλτρου
- Περιορισμός με χρήση παραθύρου
- Τύποι παραθύρων
- Ιδιότητες παραθύρων
- Παράδειγμα 1
- Παράδειγμα 2
- Άσκηση



Σχεδίαση FIR φίλτρων γραμμικής φάσης με χρήση παραθύρου

- Ιδανικό Low-Pass filter

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-a)\omega_c]}{\pi(n-a)}$$

- Επειδή το ιδανικό LP φίλτρο δεν είναι πραγματοποιήσιμο (είναι αναιτιατό και ασταθές), πρέπει να προσδιοριστούν οι προδιαγραφές πραγματοποιήσιμου LP φίλτρου.



Συχνοτικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

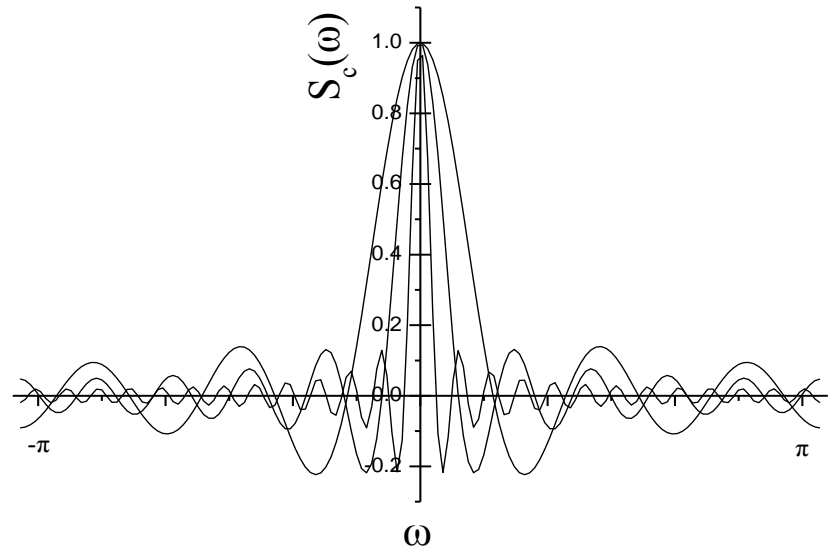
- Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier της πεπερασμένης ακολουθίας προκύπτει από τον Μετασχηματισμό Fourier της άπειρης με συνέλιξη με το Μετασχηματισμό Fourier της τετραγωνικής παραθυρικής ακολουθίας.

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \Pi(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi(e^{j\tau}) X(e^{j(\omega-\tau)}) d\tau$$



Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

$$\Pi(e^{j\omega}) = F\{\bar{\omega}n\} = \left(L e^{-j\frac{L-1}{2}\omega} \right) \frac{\sin\left(\frac{L\omega}{2}\right)}{L \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

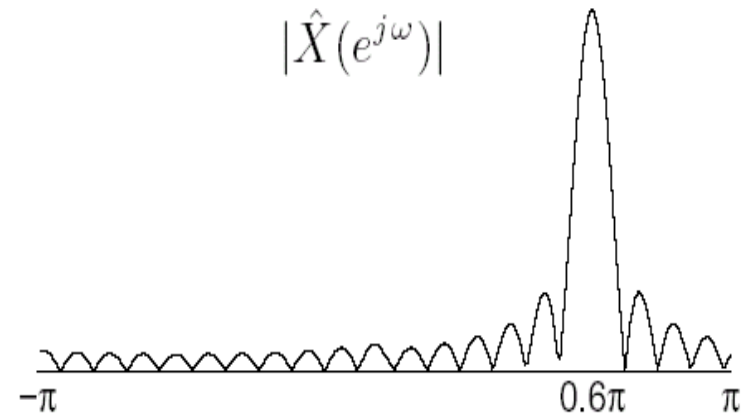
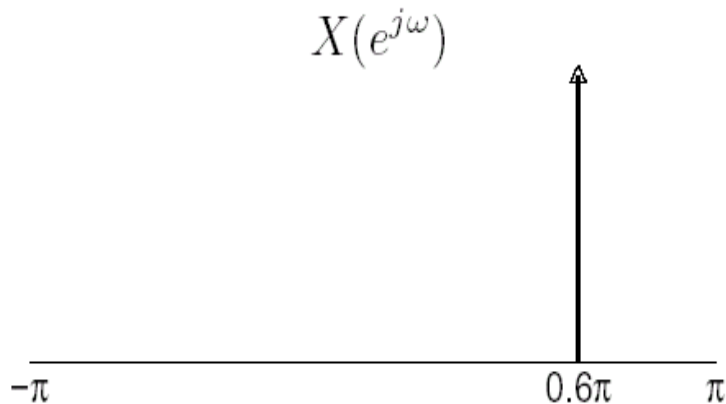


Δημιουργούνται παρασιτικές συχνότητες εκτός της ζώνης συχνοτήτων του σήματος.



Συχνοτικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

- Παράδειγμα 1: Έστω μιγαδικό ημιτόνο συχνότητας $\omega_0 = 0.6\pi$.



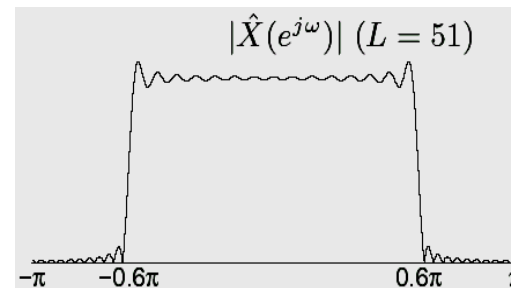
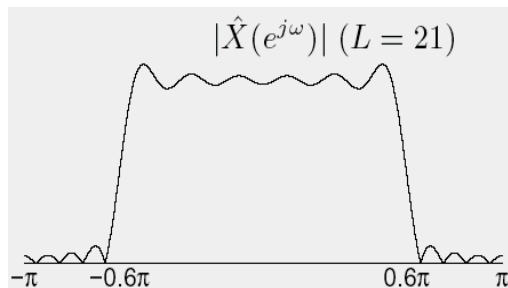
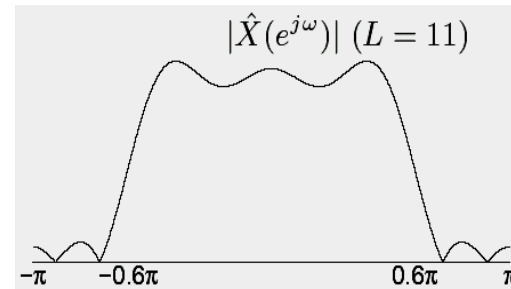
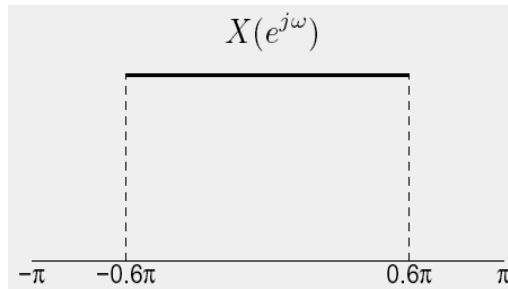
Με χρήση τετραγωνικού παραθύρου $L=21$.

Παρατηρούμε ότι ο κεντρικός λοβός είναι τοποθετημένος πάνω στη σωστή συχνότητα. Ωστόσο εάν η παρουσία λοβού υποδηλώνει ύπαρξη συχνότητας, τότε είμαστε κατά κάποιο τρόπο υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν επίσης συχνότητες εκεί όπου εμφανίζονται οι δευτερεύοντες λοβοί, πράγμα που φυσικά δεν συμβαίνει.



Συχνотικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

- Παράδειγμα 2: Σήμα πεπερασμένου εύρους ζώνης.





Συχνοτικό Περιεχόμενο Πεπερασμένης Ακολουθίας

Στο παράδειγμα 2

- Ο κυματισμός που παρατηρείται, είναι αμείωτου πλάτους οσοδήποτε μεγάλος και να είναι ο αριθμός L των δειγμάτων και η παρούσα του οφείλεται στους αντίστοιχους κυματισμούς του Μετασχηματισμού Fourier του παραθύρου.
- Το αναμενόμενο θα ήταν να μειώνεται το σφάλμα προσέγγισης με αύξηση του αριθμού των δειγμάτων.



Προδιαγραφές πραγματοποιήσιμου LP φίλτρου

$$1 - \delta_p < |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_p$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \quad \omega_s < |\omega| < \pi$$

ω_p : συχνότητα διέλευσης

ω_s : συχνότητα αποκοπής

δ_p : απόκλιση ζώνης διέλευσης, $\alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_p)$

δ_s : απόλκιση (εξασθένιση) ζώνης αποκοπής, $\alpha_s = -20 \log_{10}(\delta_s)$

Δf : εύρος ζώνης μετάβασης, $\Delta f = \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}$

ω_c : συχνότητα αποκοπής, $\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}$



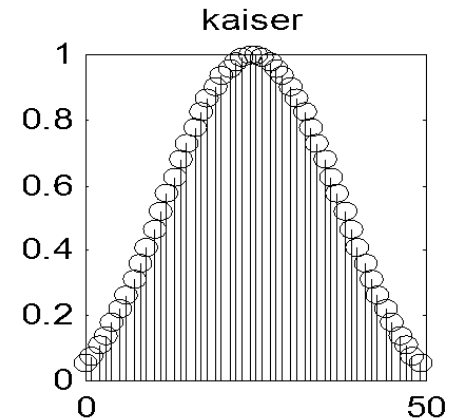
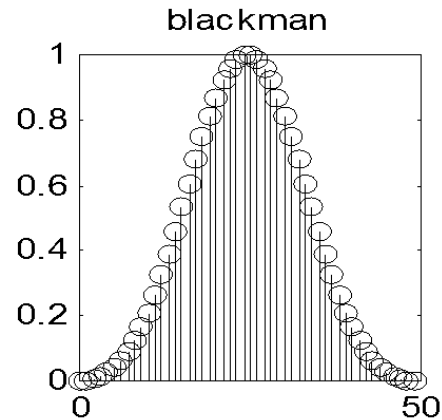
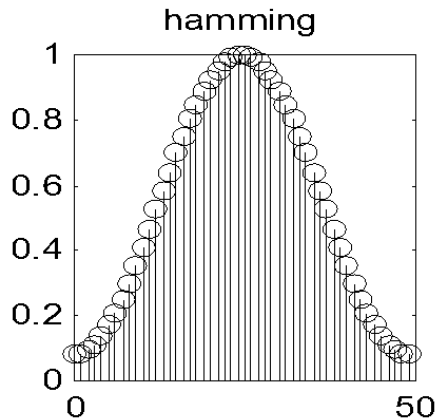
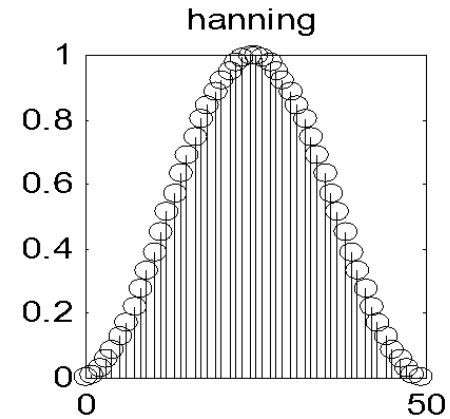
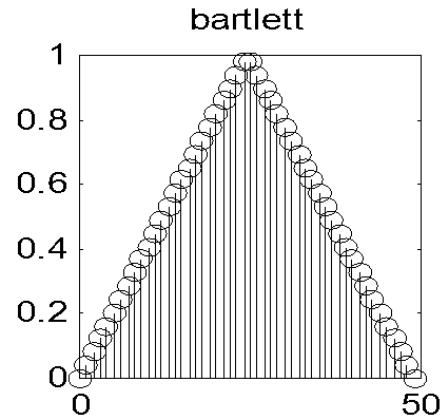
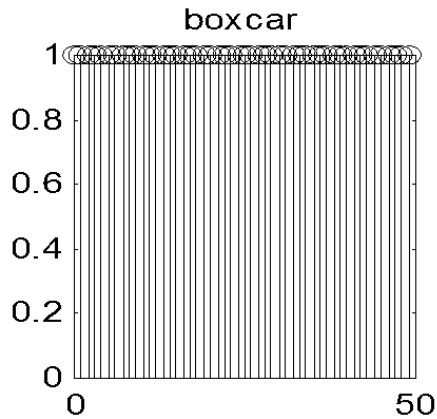
Περιορισμός με χρήση παραθύρου

Τύποι παραθύρων:

- **Ορθογώνιο**
- **Bartlett**
- **Hanning**
- **Hamming**
- **Blackman**
- **Kaiser**



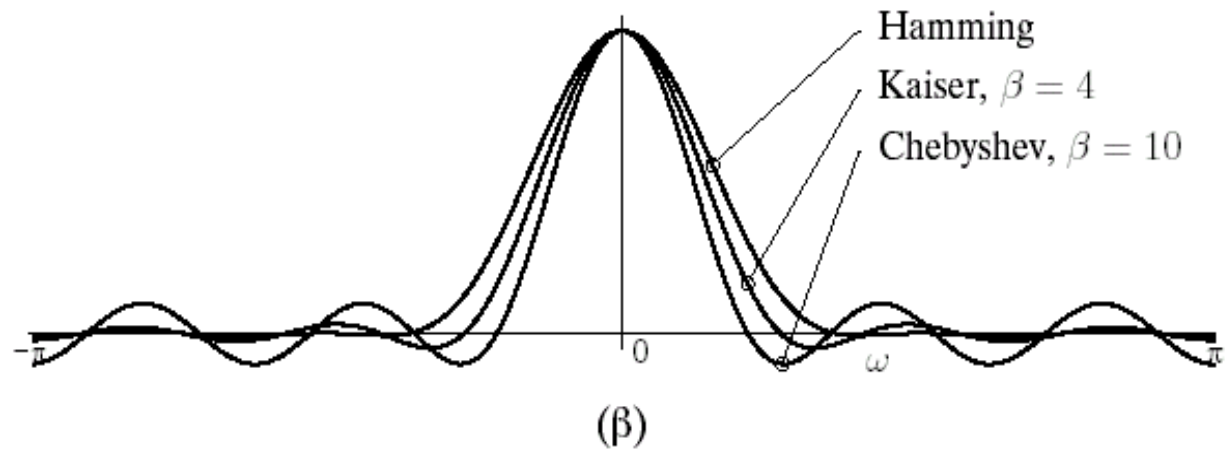
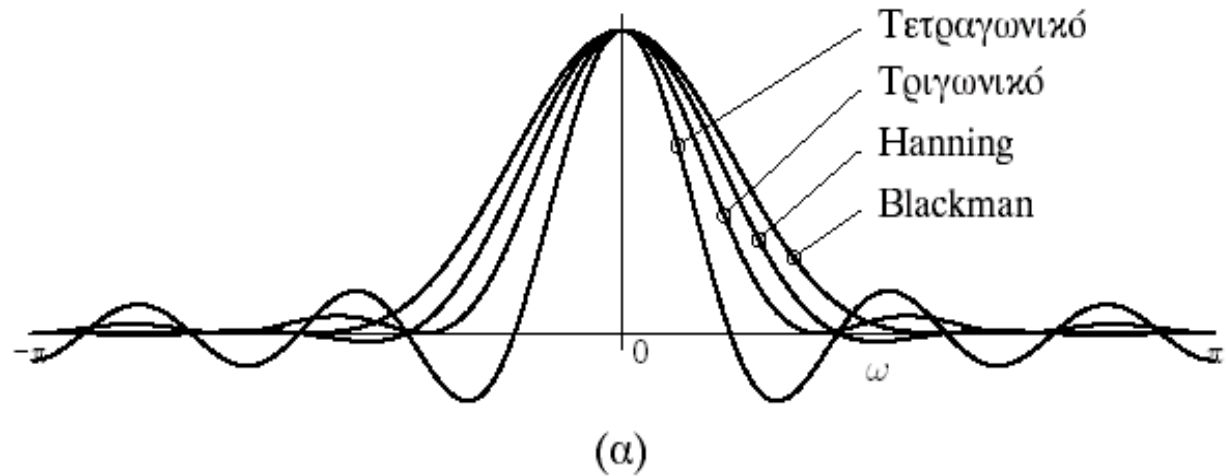
Τύποι παραθύρων





Τύποι Παραθύρων

- Μετασχηματισμός Fourier των διαφόρων παραθύρων μεγέθους (L=11)





Ιδιότητες παραθύρων

	$\Delta\omega$	$\Delta f = \Delta\omega / 2\pi$	Πλάτος πλευρικού Λοβού (dB)	Εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής
Ορθογώνιο	$1.8\pi/N$	$0.9/N$	-13	21
Bartlett	$6.1\pi/N$	$3.05/N$	-27	25
Hanning	$6.2\pi/N$	$3.1/N$	-31	44
Hamming	$6.6\pi/N$	$3.3/N$	-41	53
Blackman	$11\pi/N$	$5.5/N$	-57	74



Παράδειγμα 1

Με τη μέθοδο σχεδίασης φίλτρων με τη χρήση παραθύρων να σχεδιαστεί FIR φίλτρο γραμμικής φάσης $N=25$ το οποίο θα προσεγγίζει την παρακάτω συνάρτηση πλάτους της ιδανικής απόκρισης συχνότητας:

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 0.2\pi \\ 0, & 0.2\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



Παράδειγμα 1

- Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h(n) \exp[-jn\omega] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{25} h(n) \exp[-jn\omega]$$

- Η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n) = c(n) \cdot w(n)$$
$$c(n) = \frac{\sin[\omega_c \cdot (n - a)]}{(n - a) \cdot \pi}$$
$$a = \frac{N - 1}{2} = \frac{25 - 1}{2} = 12$$
$$h(n) = \frac{\sin[0.2\pi \cdot (n - 12)]}{(n - 12) \cdot \pi} \cdot w(n)$$



Παράδειγμα 2

- Με τη μέθοδο σχεδίασης φίλτρων με τη χρήση παραθύρων να σχεδιαστεί L.P. FIR φίλτρο γραμμικής φάσης περιττής τάξης με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/4$, εύρος ζώνης μετάβασης $\Delta\omega = 0.02\pi$ και κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής $\delta_s = 0.01$ με χρήση του παραθύρου Kaiser.



Παράδειγμα 2

- Απόκλιση Ζώνης Αποκοπής:

$$a_s = -20 \log(\delta_s) = -20 \log(0.01) = -40 \text{ dB}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_s - 8.7) & \alpha_s > 50 \\ 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21) & 21 < \alpha_s \leq 50 \\ 0.0 & \alpha_s < 21 \end{cases}$$

$$\beta = 0.5842(a_s - 21)^{0.4} + 0.7886(a_s - 21) \Rightarrow \beta = 0.5842(40 - 21)^{0.4} + 0.7886(40 - 21) \Rightarrow \beta = 3.4$$

$$w_n = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n-N}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad \text{όταν } L = 2N + 1 \quad I_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^k}{2^k k!} \right]^2$$



Παράδειγμα 2

- Η τάξη του φίλτρου είναι (περιττής τάξης):

$$N = \frac{\alpha_s - 7.95}{14.36\Delta f} \quad \alpha_s \geq 21$$

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{0.02\pi}{2\pi} = 0.01$$

$$\Rightarrow N = \frac{40 - 7.95}{14.36 \cdot 0.01} = 224 \cong 225$$

$$c(n) = \frac{\sin[\omega_c \cdot (n - a)]}{(n - a) \cdot \pi}$$

$$a = \frac{N - 1}{2} = \frac{225 - 1}{2} = 112$$

$$h(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4} \cdot (n - 112)\right]}{(n - 112) \cdot \pi} \cdot w(n)$$



Άσκηση

- Ένα ολοκληρωμένο σύστημα DSP, που χρησιμοποιείται σε μια εφαρμογή επεξεργασίας σήματος σε πραγματικό χρόνο, απαιτεί χρόνο για ένα κύκλο εντολής ίσο με 100nsec . Μια από τις εντολές του DSP είναι η εντολή MACD, με την βοήθεια της οποίας φορτώνεται μια τιμή από τη μνήμη δεδομένων (σήμα εισόδου), φορτώνεται μια άλλη τιμή από τη μνήμη προγράμματος (συντελεστής φίλτρου), πολλαπλασιάζονται οι δύο αυτοί αριθμοί μεταξύ τους,



Άσκηση

- προστίθεται το γινόμενο που προκύπτει στο συσσωρευτή του συστήματος του DSP (δηλαδή στον accumulator) και στη συνέχεια μετακινείται ένας αριθμός της μνήμης δεδομένων στην επόμενη θέση μνήμης (η ενέργεια αυτή αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση ή καθυστέρηση της ακολουθίας δεδομένων).
- Έτσι, για τον υπολογισμό της τιμής της εξόδου, ενός φίλτρου FIR τάξης N , τη χρονική στιγμή n , απαιτείται :



Άσκηση

- Μια εντολή για την ανάγνωση από τον επεξεργαστή της νέας τιμής της εισόδου $x(n)$,
- Στη συνέχεια απαιτούνται $(N+1)$ εντολές MACD για τον υπολογισμό της

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k)$$

- Και τέλος, μια ακόμη εντολή για την εξαγωγή της τιμής της εξόδου $y(n)$.



Άσκηση

Επιπλέον χρησιμοποιούνται οκτώ (8) ακόμη κύκλοι εντολών για κάθε τιμή του n με σκοπό να εκτελεστούν διάφορες πράξεις όπως τοποθέτηση τιμών σε δείκτες μνήμης, μηδενισμός του συσσωρευτή και άλλες.

A) Λαμβάνοντας υπόψη τις προδιαγραφές αυτές, να προσδιοριστεί το μέγιστο δυνατό εύρος ζώνης του σήματος που μπορεί να φιλτραριστεί με τη βοήθεια ενός φίλτρου FIR τάξης $N=225$ σε πραγματικό χρόνο και με χρήση μόνο ενός συστήματος DSP.



Άσκηση

Β) Ένα σήμα φωνής $x_a(t)$ υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα $f_s=8\text{kHz}$. Να προσδιοριστεί το μέγιστο δυνατό μήκος ενός φίλτρου FIR με το οποίο μπορεί να φιλτραριστεί το σήμα φωνής που υπέστη δειγματοληψία σε πραγματικό χρόνο.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/>





Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Φίλτρα FIR με χρήση παραθύρων



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης