



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ενότητα 12 : Φίλτρα FIR με μέθοδο δειγματοληψίας
Κωνσταντίνος Αγγέλης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ενότητα 12: Φίλτρα FIR με μέθοδο δειγματοληψίας

Κωνσταντίνος Αγγέλης
Καθηγητής
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Σκοποί ενότητας

- Εξάσκηση στη σχεδίαση FIR φίλτρων με τη μέθοδο της δειγματοληψίας στη συχνότητα.



Περιεχόμενα ενότητας

- Φίλτρα FIR με μέθοδο δειγματοληψίας Συχνότητας
- Δειγματοληψία συχνότητας
- Φίλτρα Τύπου I & II
- Ισοκυματικά φίλτρα γραμμικής φάσης
- Θεώρημα Εναλλαγής
- Παράδειγμα 1



Φίλτρα FIR με μέθοδο δειγματοληψίας Συχνότητας

- Η μέθοδος του παραθύρου είναι μια αποτελεσματική μέθοδος σχεδιασμού φίλτρων FIR, αν το φίλτρο που πρόκειται να σχεδιαστεί είναι ένα από τα γνωστά είδη όπως το LP (χαμηλοπερατό), HP (υψηλοπερατό), BP (ζωνοπερατό), BR (αποκλεισμού) για τα οποία έχει υπολογιστεί η πεπερασμένη ακολουθία για την ιδανική απόκριση συχνότητας.
- Αν η απόκριση συχνότητας δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, η μέθοδος δειγματοληψίας συχνότητας είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος σχεδιασμού.



Δειγματοληψία συχνότητας

- Η επιθυμητή απόκριση συχνότητας υφίσταται δειγματοληψία σε N ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, 2\pi]$

$$H(k) = H_d(e^{j2\pi k/N}), k = 0 \dots N - 1$$

- Αυτά τα δείγματα αποτελούν έναν DFT- N σημείων, του οποίου ο IDFT αντιστοιχεί σε ένα FIR φίλτρο τάξης $N-1$

$$h(n) = IDFT[H(k)]$$



Δειγματοληψία συχνότητας

- Έστω N-tap FIR. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

- Όπου $h(n)$ είναι η κρουστική απόκριση.
- Η απόκριση συχνότητας βρίσκεται αντικαθιστώντας το z με το $\exp(j\omega)$, έτσι ώστε η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση για το δείγμα συχνότητας $\omega=2\pi k/N$ να καθορίζονται από:



Δειγματοληψία συχνότητας

$$H\left(j\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$



Φίλτρα Τύπου I & II

- Για να εκμεταλλευτούμε τον αλγόριθμο του DFT έτσι ώστε να υπολογίσουμε το $h(n)$, είναι απαραίτητο να δώσουμε δείγματα συχνοτήτων σε σημεία ίδιων αποστάσεων.
- Η δειγματοληψία μπορεί να ξεκινήσει από το $\omega = 0$ ή από το $\omega = 2\pi/2N$ για να κρατήσουμε τα δειγματοληπτικά σημεία συμμετρικά σε σχέση με τον πραγματικό άξονα του πεδίου z .



Φίλτρα Τύπου I & II

- Αν η δειγματοληψία ξεκινήσει από το $\omega = 0$, τότε τα φίλτρα ονομάζονται Τύπου-I. Αν ξεκινήσει από το $\omega = \pi/N$ είναι Τύπου-II.
- Τύπου-I:
$$\omega = 2\pi \frac{n}{N}$$
- Τύπου-II:
$$\omega = 2\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{N}$$



Ισοκυματικά φίλτρα γραμμικής φάσης

- Προσεγγιστική συνάρτηση βάρους του σφάλματος:

$$E(j\omega) = W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]$$

- minmax problem: $\min_{a(k)} \left\{ \max_{\omega \in F} \left| E(e^{j\omega}) \right| \right\}$
- αναζήτηση συντελεστών :



Θεώρημα Εναλλαγής

- Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον $L+1$ συχνότητες ακροτάτων $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{L+1}$ στο σύνολο των συχνοτήτων F , ώστε:

$$E(e^{j\omega_k}) = -E(e^{j\omega_{k+1}}), k = 0 \dots L$$

$$|E(e^{j\omega_k})| = \max_{\omega \in F} \{|E(e^{j\omega})|\}, k = 0 \dots L+1$$

- Επομένως, το βέλτιστο φίλτρο είναι το ισοκυματικό φίλτρο.
- Εύρεση των συχνοτήτων των ακροτάτων με τον αλγόριθμο Parks-McClellan.



Θεώρημα Εναλλαγής

Απαίτηση Φάσης

- Πρέπει να έχουμε γραμμική μεταβολή της φάσης με το ω .
- Για να ισχύει:
 1. Το μέτρο της $H(k)$ πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς το μέσο σημείο του ολικού μήκους του φίλτρου δηλαδή ως προς το $(N-1)/2$.
 2. Η φάση πρέπει να είναι αντισυμμετρική ως προς το μέσο σημείο του ολικού μήκους του φίλτρου δηλαδή ως προς το $(N-1)/2$.



Θεώρημα Εναλλαγής

$$\theta = -\frac{N-1}{2}\omega \dots \dots \dots \text{για} \dots 0 \leq \omega \leq \pi$$

$$\theta = (N-1)\pi - \frac{N-1}{2}\omega \dots \dots \dots \text{για} \dots \pi < \omega \leq 2\pi$$

Η απόκριση συχνότητας βρίσκεται με χρήση της σχέσης: $H(e^{j\omega}) = A e^{i\theta}$, $A = H_r(k)$



Παράδειγμα 1

Σχεδιάστε ένα φίλτρο FIR 6-σημείων το οποίο έχει απολαβή 1 από $\omega = 0$ έως $\pi/2$, ή στη βαθμίδα κανονικής συχνότητας από $f = 0$ σε 0.25 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο δειγματοληψίας συχνότητας Τύπου-I.

- Λύση:
- Οι συχνότητες για τη δειγματοληψία της απόκρισης συχνότητας είναι οι: $\omega = 2\pi \frac{n}{N}$



Παράδειγμα 1

- Όπου $n = 0, 1, 2, 4$, και 5 , και $N = 6$.
- Η φάση πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη κατάσταση γραμμικής φάσης:

$$\theta = -\frac{N-1}{2}\omega \dots \dots \dots \text{για} \dots 0 \leq \omega \leq \pi$$

$$\theta = (N-1)\pi - \frac{N-1}{2}\omega \dots \dots \dots \text{για} \dots \pi < \omega \leq 2\pi$$



Παράδειγμα 1

- Επομένως τα δείγματα της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = A e^{i\theta}, \quad A = H_r(k)$$

$$H(0) = 1, H(1) = e^{-j5\pi/6}, H(2) = 0, H(3) = 0, H(4) = 0, H(5) = e^{+j5\pi/6}$$

$$h(n) = -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 H(k) e^{\frac{2\pi k n}{6}}$$



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/>





Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Φίλτρα FIR με μέθοδο
δειγματοληψίας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης