



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ενότητα 5 : Θεώρημα Shannon
Κωνσταντίνος Αγγέλης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ενότητα 5: Θεώρημα Shannon

Κωνσταντίνος Αγγέλης
Καθηγητής
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Σκοποί ενότητας

- Σε συνέχεια της προηγούμενης ενότητας, παρουσιάζεται το βασικό θεώρημα για την δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος προκειμένου να ανακατασκευαστεί.
- Περιγράφονται τα προβλήματα που προκύπτουν όταν δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Shannon



Περιεχόμενα ενότητας

- Το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon
- Αποφυγή φαινομένου αναδίπλωσης
- Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας
- Συνοπτική αναπαράσταση A/D

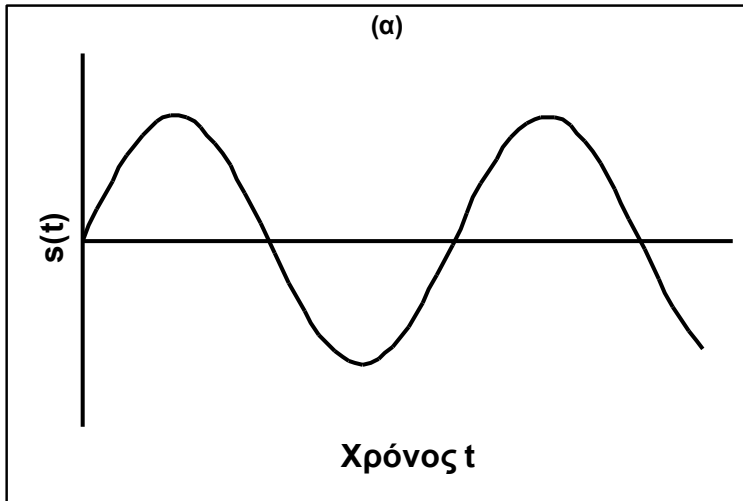


Το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

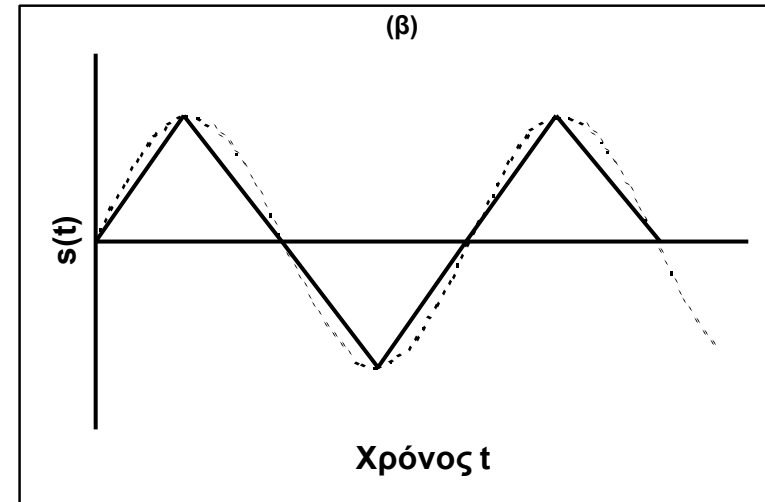
- Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ (σήμα συνεχούς χρόνου) το οποίο δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες της f_m μπορεί να ανακατασκευαστεί ακριβώς από τα δείγματα $x_n = x(nT_s)$, εάν η συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί τη σχέση $f_s \geq 2f_m$.



Το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon



Αναλογικό σήμα $x(t)$
(σήμα συνεχούς χρόνου)

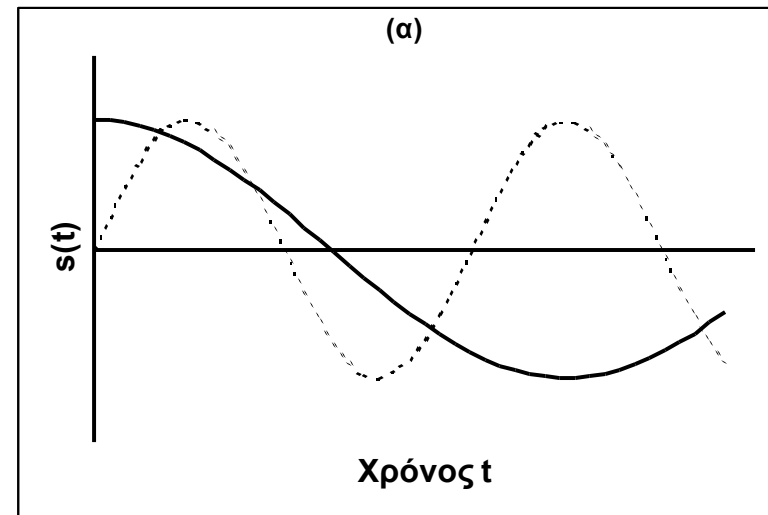


Δειγματοληψία σε
συχνότητα $f_s = 2f_a$.



Το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

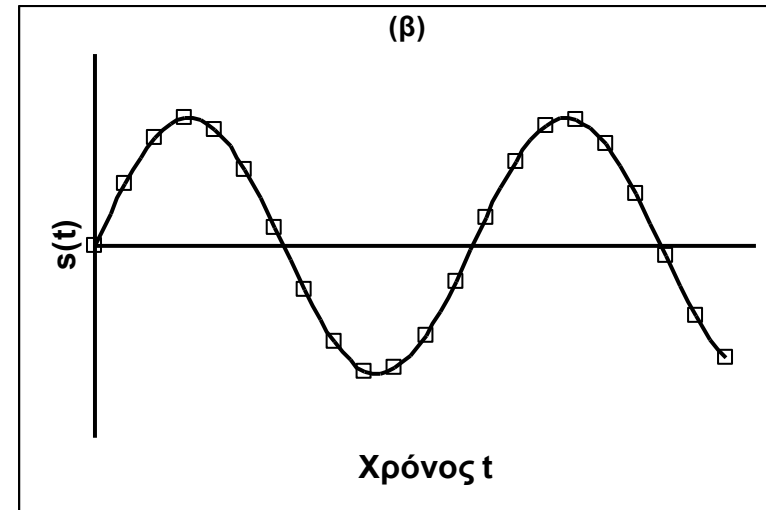
Δειγματοληψία σε
συχνότητα $f_s < 2f_a$.
Παρατηρείται η
εμφάνιση του
φαινομένου
αναδίπλωσης.





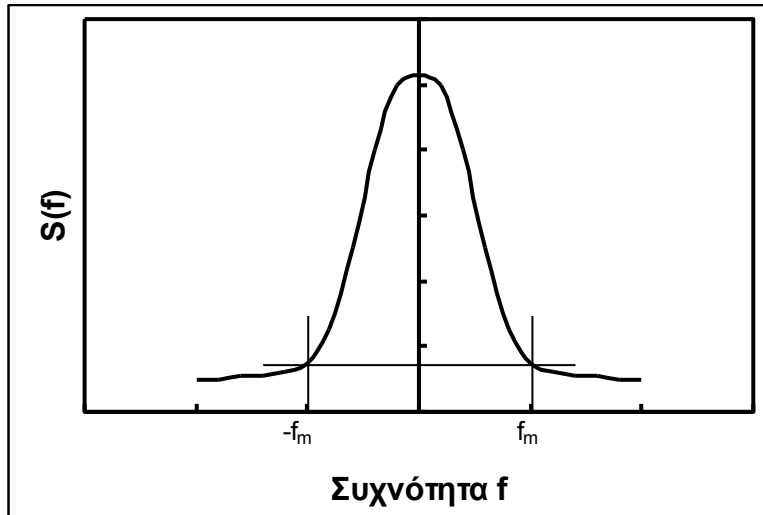
Το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Δειγματοληψία σε συχνότητα $f_s \gg 2f_a$ δίνει πολύ πιο ακριβή αναπαράσταση του αρχικού σήματος.

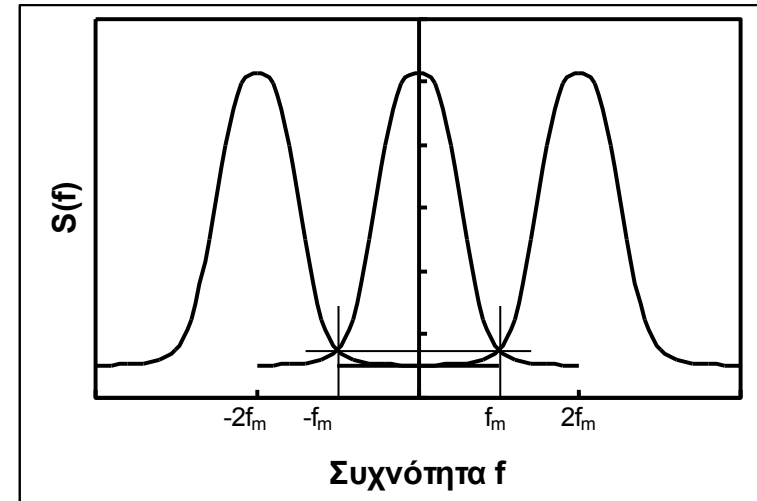




Αποφυγή φαινομένου αναδίπλωσης



Ευρύ φάσμα για ένα
τυπικό
σήμα εισόδου

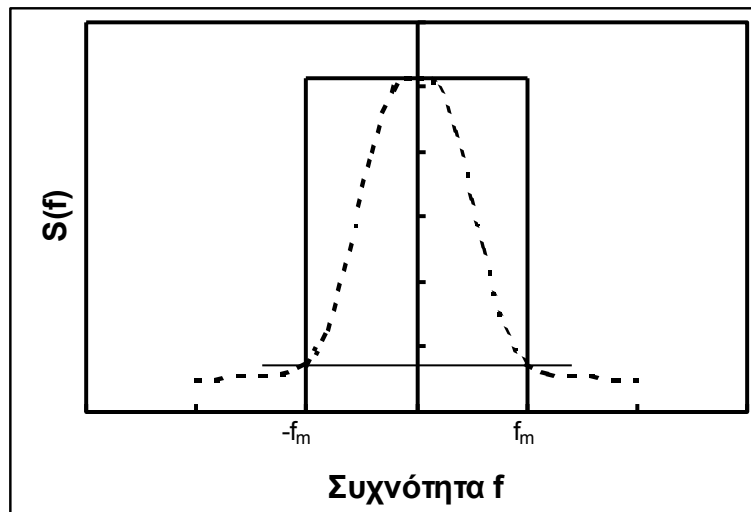


Δειγματοληψία
ευρέως φάσματος με
συχνότητα $f_s = 2f_a$. Σε
αυτή την περίπτωση
παρατηρείται
αναδίπλωση



Αποφυγή φαινομένου αναδίπλωσης

Εφαρμογή χαμηλοπερατού φίλτρου για τον περιορισμό της υψηλής συχνότητας στην f_m .





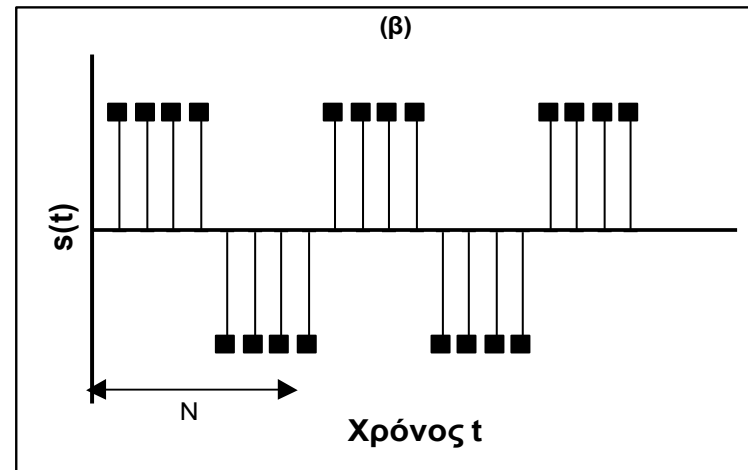
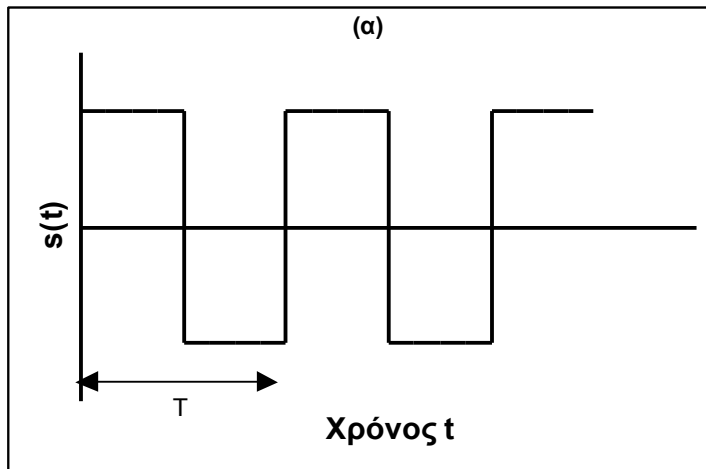
Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας

- Η βασικότερη διαφορά μεταξύ σημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου:
- Οι συχνότητες των αναλογικών σημάτων παίρνουν τιμές στο διάστημα $[0 \infty)$
- Ενώ οι αντίστοιχες των ψηφιακών περιορίζονται στο $[0 1/2]$.
- Στον συνεχή χρόνο: $0 < T < \infty$
- η αναλογική συχνότητα $f = 1/T$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων $0 < f < \infty$.



Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας

Στο διακριτό χρόνο: Η μικρότερη δυνατή περίοδος που επιτρέπει εναλλαγή είναι για $N=2$. Επομένως για τον διακριτό χρόνο η περίοδος N ικανοποιεί $2 < N < \infty$ η αντίστοιχη συχνότητα $\lambda = 1/N$ να περιορίζεται στα όρια $0 < \lambda < 1/2$





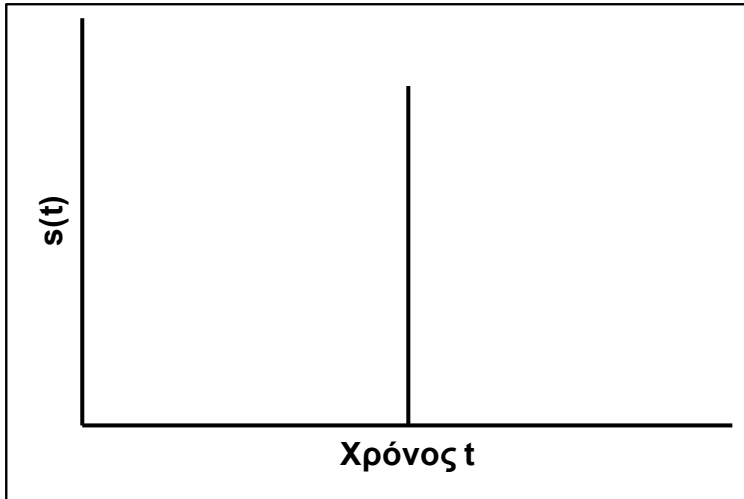
Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας

Στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος:

Δειγματοληψία σημαίνει πολλαπλασιασμός του αρχικού αναλογικού σήματος με μια περιοδική δέλτα συνάρτηση $\delta(t)$ ή κρουστική απόκριση ή συνάρτηση Dirac

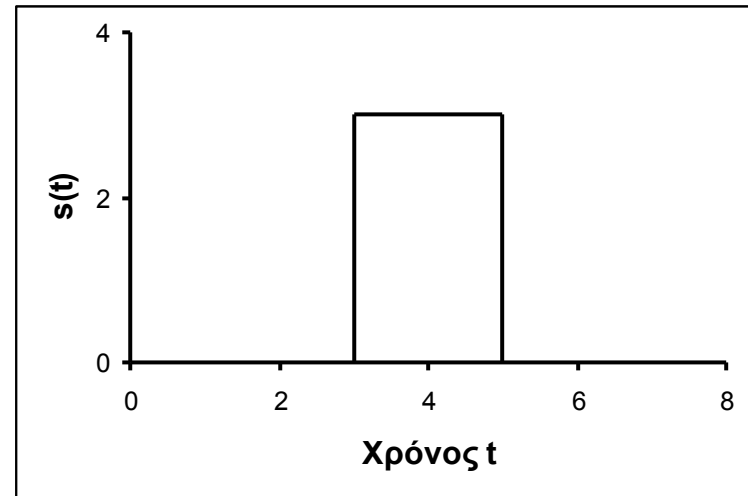


Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας



Ιδανικός Παλμός του
οποίου: Εύρος = 0

$$\text{Πλάτος} = \infty \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

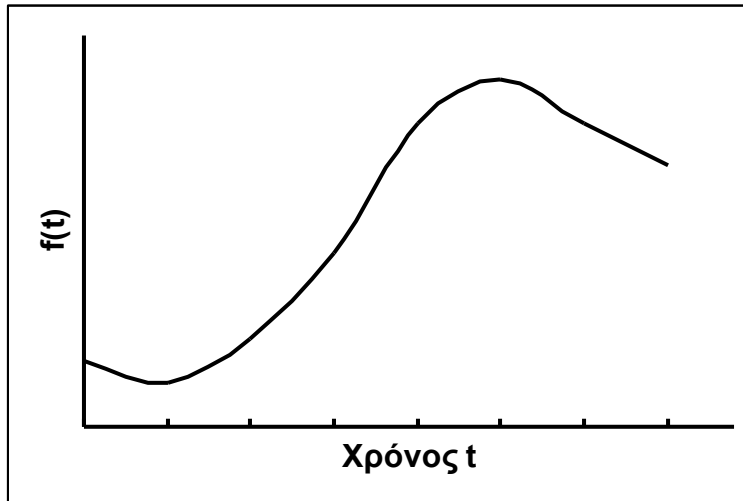


Στην Πράξη Παλμός
του οποίου: Εύρος = A

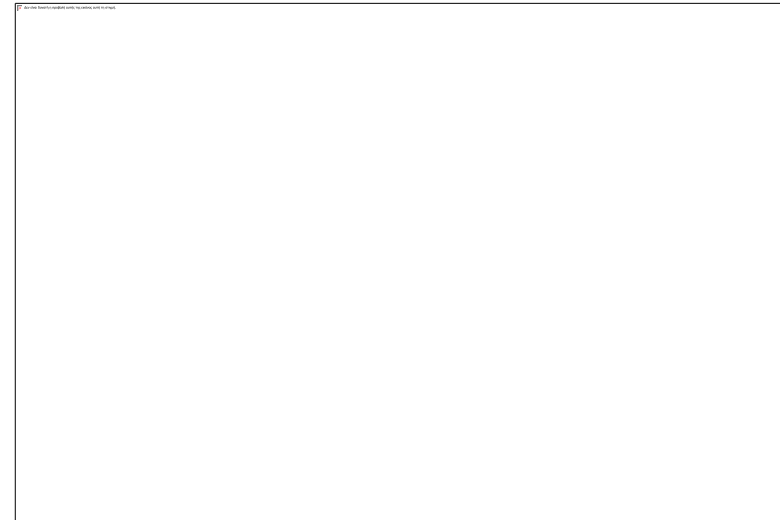
$$\text{Πλάτος} = 1 \int_{-\infty}^{\infty} A \delta(t) dt = A$$



Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας



Αναλογικό σήμα
εισόδου $f(t)$.



Ακολουθία κρουστικών
αποκρίσεων σε ίσες
χρονικές αποστάσεις
μεταξύ τους t_s .



Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας

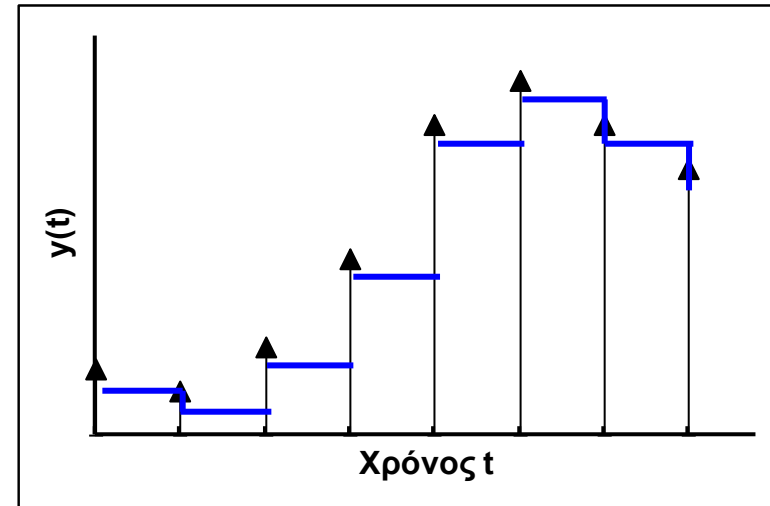
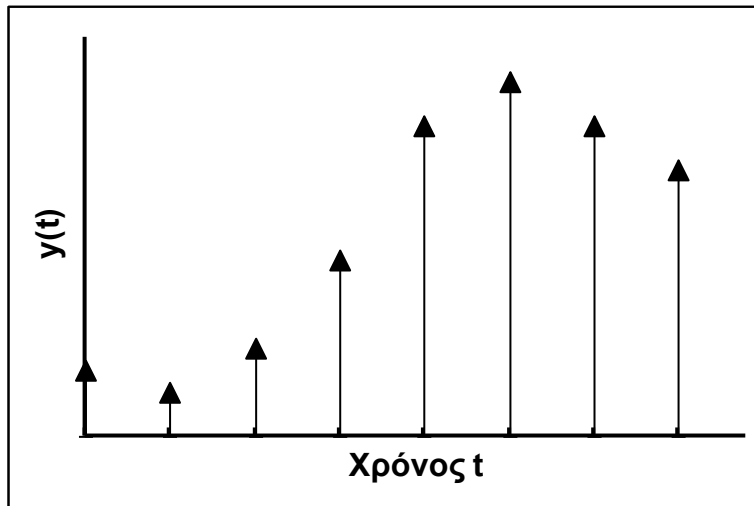
- Το σήμα $s(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$s(t) = \delta(t - \infty) + \dots + \delta(t - 2t_s) + \delta(t - t_s) + \delta(t) + \delta(t + t_s) + \delta(t + 2t_s) + \dots + \delta(t + \infty)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nt_s)$$



Μαθηματική αναπαράσταση δειγματοληψίας

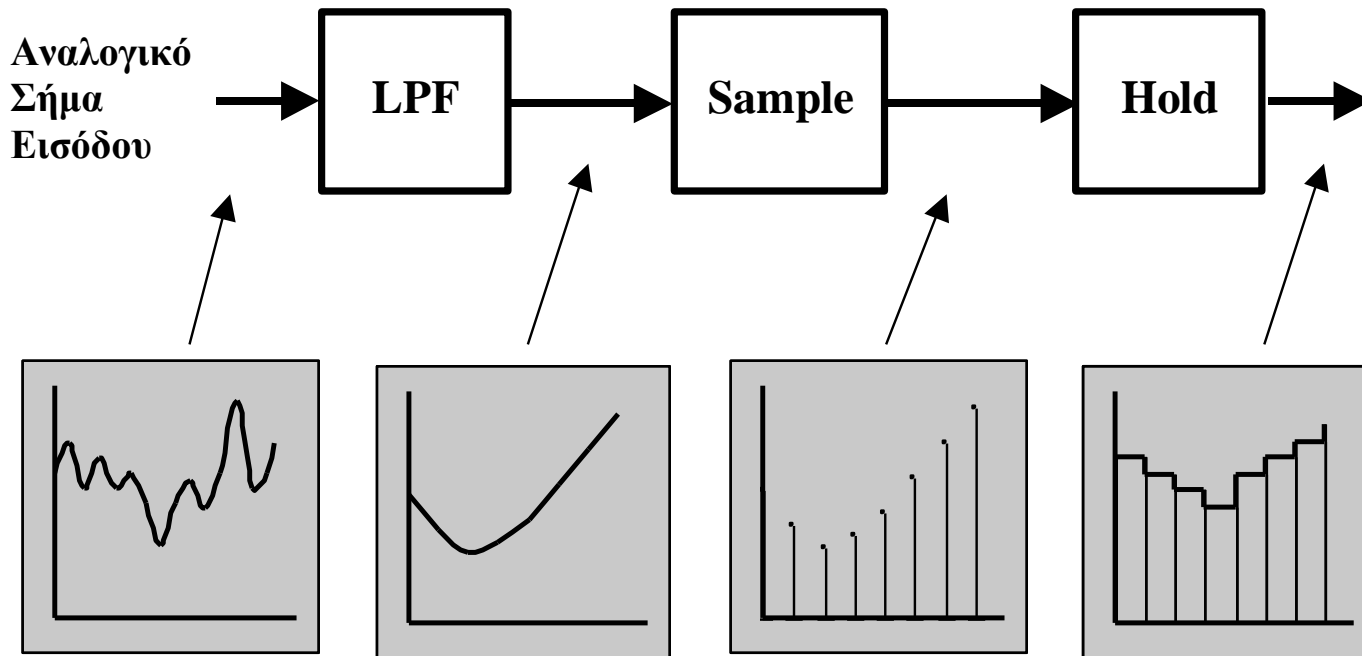


$$y(t) = f(t) s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t) \delta(t - nt_s)$$



Συνοπτική αναπαράσταση A/D

anti-aliasing LPF, δειγματοληψία και κράτηση





Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Κωνσταντίνος Αγγέλης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP102/>





Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Κολοβού Ξανθή
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Θεώρημα Shanon



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης