



Ελληνική Δημοκρατία  
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό  
Ίδρυμα Ηπείρου

# Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 1 : Σύνολα & Σχέσεις (1/2)

Αλέξανδρος Τζάλλας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

## Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 1 : Σύνολα & Σχέσεις (1/2)

Αλέξανδρος Τζάλλας

Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





# Το Μάθημα

- Στόχοι
  - εισαγωγή στα μαθηματικά των υπολογιστών
  - κατανόηση θεμελιωδών αρχών της υπολογιστικής επιστήμης
  - παρουσία μακρόχρονης ιστορίας υπολογιστικής επιστήμης
  - γνωριμία με μια ενεργό ερευνητική περιοχή
- Καινοτομία
  - συνδυασμός θεωρίας & πράξης
  - βασικά στοιχεία θεωρίας μεταγλωττιστών



# Γιατί;

- Μηχανικοί Πληροφορικής ή Υπολογιστών
  - παραπάνω από απλοί προγραμματιστές
  - επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων
  - επινόηση αποδοτικών αλγορίθμων
  - ανάγκη ανάλυσης προβλημάτων & αλγορίθμων
- Επιστήμη Πληροφορικής ή Υπολογιστών
  - θεμελίωση της υπολογιστικής επιστήμης
  - κομψή μαθηματική θεωρία
  - ανεξάρτητη από το φυσικό μοντέλο υπολογισμού
  - διαχρονική αξία



# Ωρολόγιο Πρόγραμμα

- **Διαλέξεις**
  - Παρασκευή, 11:00-13:00, αμφιθέατρο Β ή εργαστήριο
- **Εργαστήριο (Ασκήσεις Πράξεις)**
  - Παρασκευή, 13:00-14:00, αμφιθέατρο Β ή εργαστήριο
  - Επίλυση ασκήσεων



# Ύλη Μαθήματος

- **Α' Μέρος**
  - Σύνολα, σχέσεις, αλφάβητα & γλώσσες
  - Κανονικές γλώσσες & πεπερασμένα αυτόματα
  - Εφαρμογή: λεκτική ανάλυση & το εργαλείο flex
  - Γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα & αυτόματα στοίβας
  - Εφαρμογή: συντακτική ανάλυση & το εργαλείο bison
- **Β' Μέρος**
  - Αναδρομικές γλώσσες & μηχανές Turing
  - Επιλυσιμότητα & μη Επιλυσιμότητα
  - Υπολογιστική πολυπλοκότητα & οι κλάσεις  $P$  &  $NP$
  - Εφαρμογή: εκτίμηση δυσκολίας, προσεγγιστικοί αλγόριθμοι





# Σήμερα

- **Σύνολα**
  - ορισμός, αναπαράσταση, πράξεις & ιδιότητες
  - μέγεθος συνόλων, απειροσύνολα, ιδιότητες
- **Διατεταγμένα Ζεύγη**
  - ορισμός, Καρτεσιανό γινόμενο, διαφορές από σύνολα
- **Σχέσεις**
  - δυναμικές σχέσεις, γραφική αναπαράσταση
  - Σχέσεις ισοδυναμίας, κλάσεις ισοδυναμίας
- **Συναρτήσεις**
  - ορισμός, ειδικοί τύποι, πράξεις



# Σύνολα & Λογική

- Θεμελιώδης ιδιότητα με ρίζες στην Αριστοτέλεια λογική:
- Για ένα στοιχείο  $x$  και ένα σύνολο  $A$  μία από τις δύο προτάσεις μπορεί να είναι αληθής:
  1. το  $x$  ανήκει στο  $A$  (συμβολικά  $x \in A$ )
  2. το  $x$  δεν ανήκει στο  $A$  (συμβολικά  $x \notin A$ )
- Υπάρχουν βέβαια και τα *θολά* σύνολα (fuzzy sets)



# Σύνολα & Λογική

- Θεμελιώδης ιδιότητα με ρίζες στην Αριστοτέλεια λογική:

Για ένα στοιχείο  $x$  και ένα σύνολο  $A$  μία από τις δύο προτάσεις μπορεί να είναι αληθής:

1. το  $x$  ανήκει στο  $A$  (συμβολικά  $x \in A$ )
  2. το  $x$  δεν ανήκει στο  $A$  (συμβολικά  $x \notin A$ )
- Υπάρχουν βέβαια και τα *θολά* σύνολα (fuzzy sets)



# Σύνολα Αριθμών (1/2)

- **Σύνολο**
  - Μια ομάδα αντικείμενων
  - Τα αντικείμενα αυτά τα ονομάζουμε **στοιχεία** του συνόλου  
π.χ. {True, False}, {1,4,5}, {α,ω}, {{1,2}, {2,4},{3,6}}
- **Η σειριακή διάταξη των στοιχείων ενός συνόλου δεν έχει σημασία**
  - {1,2,3} = {3,2,1}
- **Ο αριθμός επαναλήψεων των στοιχείων ενός συνόλου δεν έχει σημασία**
  - {1,2,2,3,3,3} = {1,1,2,3}
- **Πλήθος είναι ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου Γράφουμε  $|A|$  για το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $A$** 
  - $|\{1,2,3\}| = 3$
  - $|\{1,2,2,3,3,3\}| = 3$



# Σύνολα Αριθμών (2/2)

- $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n : n \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}$
- $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{n : n \text{ είναι ακέραιος αριθμός}\}$
- $\mathbf{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbf{Z} \text{ και } b \neq 0\}$
- $\mathbf{R} = \{x : x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}$
- $\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}\}$



# Αναπαράσταση Συνόλων

- Ένα σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί

- Συστηματικά:

$$B = \{3, 13, 25\}$$

- Κατηγορηματικά: Μέσω κανόνων που χαρακτηρίζουν τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο

$$\Gamma = \{x : x \text{ είναι άρτιος αριθμός μικρότερος από το 9 και μεγαλύτερος από το 3}\}$$

- Διαγραμματικά: Διάγραμμα Venn

Λέξεις από T

- 
- Τύχη
  - Τυρί
  - Τετριμμένος

- Σύμβολα

- $\in$  : ανήκει, π.χ.  $1 \in \{1,4\}$
  - $\notin$  : δεν ανήκει  $2 \notin \{1,4\}$



# Παραδείγματα

- **Εναλλακτική παράσταση του  $B = \{1, 2\}$**

$$B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{n : n \in \mathbf{N}, n < 3\}$$

- **Το κενό:**

$$\emptyset = \{x : x \neq x, x \subset \mathbf{N}\}$$



# Υποσύνολο

- Έστω δύο σύνολα  $S = \emptyset$  και  $A$
- Το  $A$  ονομάζεται υποσύνολο (subset) του  $S$  αν κάθε στοιχείο του  $A$  είναι και στοιχείο του  $S$

$$A \subseteq S \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in S$$





# Υποσύνολο

- Έστω δύο σύνολα  $S = \emptyset$  και  $A$
- Το  $A$  ονομάζεται υποσύνολο (subset) του  $S$  αν κάθε στοιχείο του  $A$  είναι και στοιχείο του  $S$

$$A \subseteq S \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in S$$



# Ισότητα Συνόλων

- Δύο σύνολα  $A$  και  $B$  λέγονται ίσα αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία
- **Εναλλακτικός ορισμός:** τα σύνολα είναι ίσα αν το  $A$  είναι υποσύνολο του  $B$  και το  $B$  είναι υποσύνολο του  $A$

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A$$



# Διάταξη Συνόλων

- Αν  $A \subseteq B$  και  $A \neq B$ , δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του  $B$  που δεν ανήκει στο  $A$ , τότε το  $A$  είναι **γνήσιο υποσύνολο** (proper subset) του  $B$  και συμβολίζουμε

$$A \subset B$$

Ισχύει  $\Leftrightarrow \emptyset \subseteq S$  και  $S \subseteq S$  για κάθε σύνολο  $S$



# Παραδείγματα

- Αν θεωρήσουμε τα σύνολα
  1.  $\emptyset$  «...είναι ένα σύνολο με 0 στοιχεία »
  2.  $\{\emptyset\}$  «...είναι σύνολο με 1 στοιχείο το καθένα»
  3.  $\{\{\emptyset\}\}$  «...είναι σύνολο με 1 στοιχείο το καθένα»

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}, \emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$$

Το  $\{\emptyset\}$  δεν είναι υποσύνολο του  $\{\{\emptyset\}\}$



# Πράξεις Συνόλων-Ένωση

- Η **ένωση** (union) δύο συνόλων  $A$  και  $B$  συμβολίζεται με

$$A \cup B$$

- και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων  $A$  και  $B$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



# Πράξεις Συνόλων-Διαφορά

- Η διαφορά (difference) δύο συνόλων  $A$  και  $B$  συμβολίζεται με  $A-B$  και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του  $A$  που δεν ανήκουν στο  $B$ :

$$A - B = \{x: x \in A \text{ αλλά } x \notin B\}$$



# Πράξεις Συνόλων-Τομή

- Η τομή (intersection) δύο συνόλων  $A$  και  $B$  συμβολίζεται με

$$A \cap B$$

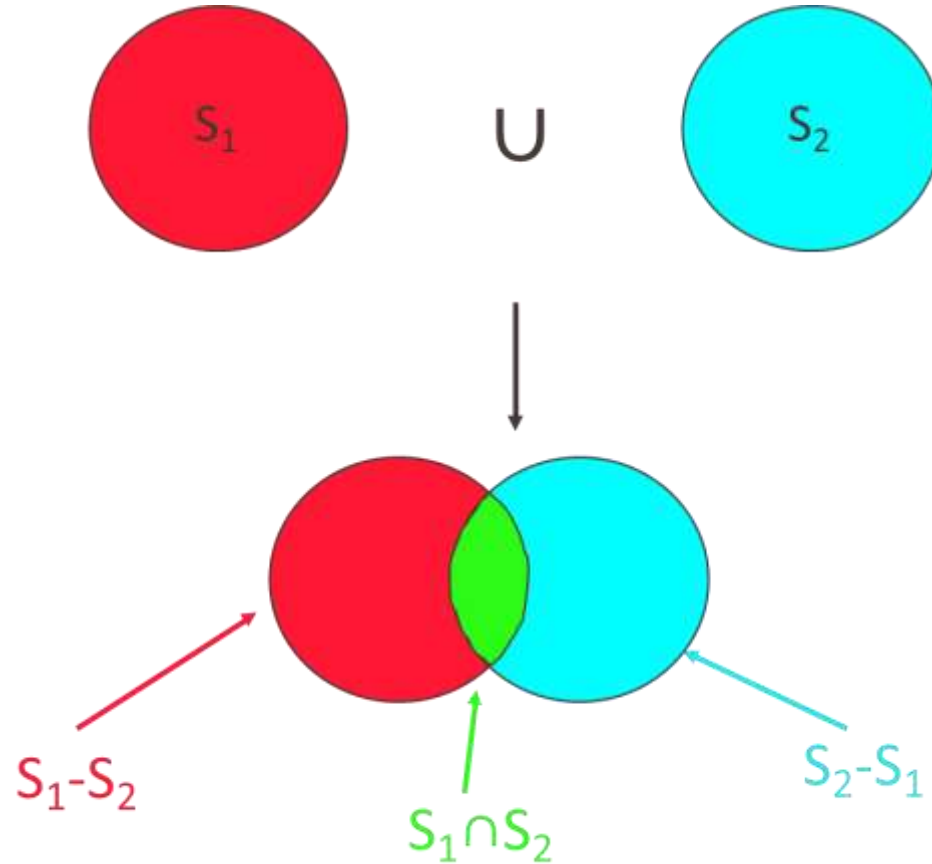
- και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα  $A$  και  $B$

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ και } x \in B \}$$

- Δύο σύνολα  $A$  και  $B$  λέγονται **ξένα** όταν η τομή τους είναι το  $\emptyset$



# Ένωση-Τομή-Διαφορά







# Ένα Απλό Πρόβλημα

- Η Σοφία λέει την αλήθεια κάθε **Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη και Πέμπτη**, ενώ η αδερφή της Μαρία λέει την αλήθεια κάθε **Δευτέρα, Παρασκευή, Σάββατο και Κυριακή**
- $\Sigma = \{\Delta\epsilon, \text{Τρ}, \text{Τε}, \text{Πε}\}$   $M = \{\Delta\epsilon, \text{Πα}, \Sigma\alpha, \text{Κυ}\}$
- Αν και οι δύο ομολογήσουν στην μητέρα τους ότι «Χτες είπαν ψέματα», **τι μέρα είναι σήμερα;**
- Η Σ λέει ψέμα και η Μ αλήθεια:  $\bar{\Sigma} \cap M = \{\text{Πα}, \Sigma\alpha, \text{Κυ}\}$
- Η Σ λέει αλήθεια και η Μ ψέμα:  $\Sigma \cap \bar{M} = \{\text{Τρ}, \text{Τε}, \text{Πε}\}$
- Σήμερα και οι δύο λένε αλήθεια ή ψέματα:  $\Sigma \cap M = \{\Delta\epsilon\}$  ή  $\bar{\Sigma} \cap \bar{M} = \emptyset$



# Βασικές Ιδιότητες

- Μεταθετική:  $A \cap B = B \cap A$   
 $A \cup B = B \cup A$
- Προσεταιριστική:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Επιμεριστική:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



# Δυναμοσύνο

- Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου  $S$ , ονομάζεται **δυναμοσύνολο** (power set) του  $S$  και συμβολίζεται με  $P(S)$ :

$$P(S) = \{ A : A \subseteq S \}$$



# Παραδείγματα

- Για  $A = \{1,2,3\}$

$$P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

- Το  $2^{\{c, d\}} = \{\{c, d\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$



# Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.
- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

## Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064
- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369
- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003
- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Αλέξανδρος Τζάλλας.  
Θεωρία Υπολογισμού.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP112/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης  
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Τέλος Ενότητας

## Σύνολα & Σχέσεις (1/2)



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

