Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 2 : **Σύνολα & Σχέσεις (2/2)**

Αλέξανδρος Τζάλλας

Ανοιχτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 2 : Σύνολα & Σχέσεις (2/2)

Αλέξανδρος Τζάλλας

Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κλειστές Πράξεις Συνόλων

- Οι πράξεις της ένωσης και της τομής στο δυναμοσύνολο P(S) είναι κλειστές:

$$A \in P(S)\,,\, B \in P(S) \Rightarrow A \cup B \in P(S)$$

$$A \in P(S)\,,\, B \in P(S) \Rightarrow A \cap B \in P(S)$$

Παράδειγμα

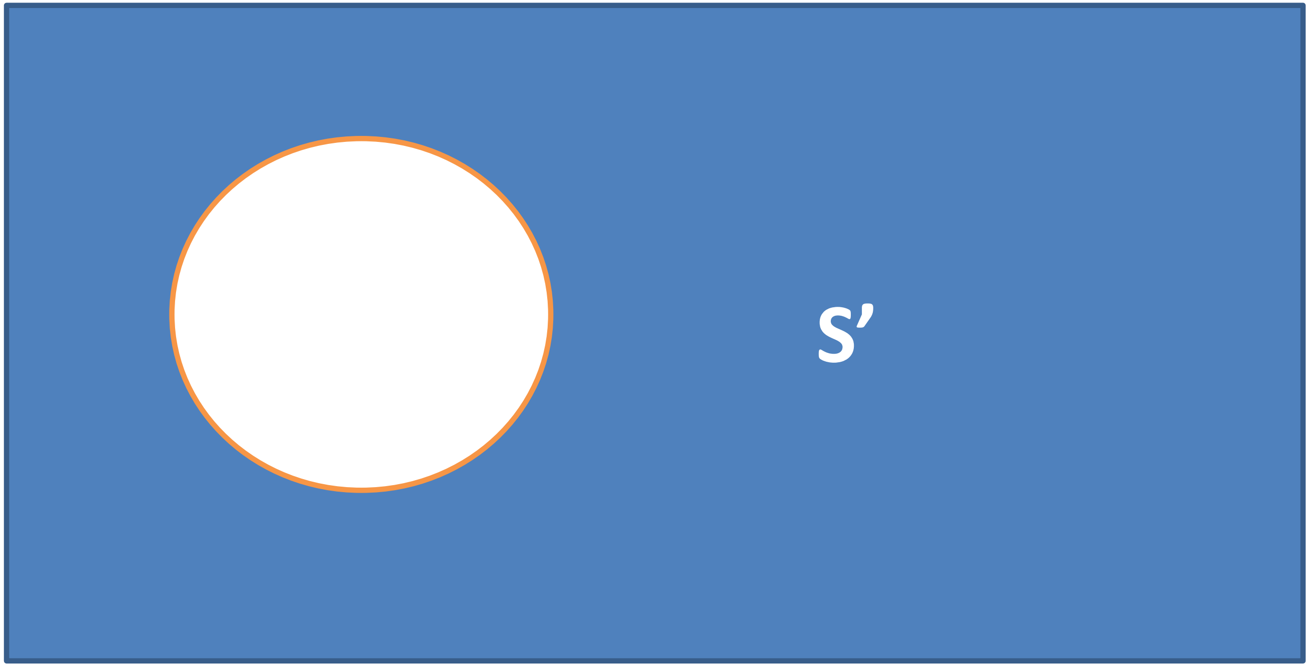
- S={a, b, c}
- P(S) = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, c}, {a, b, c} = S}

$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	S	S
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	S	$\{b,c\}$	S
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	S	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	S	$\{a,b\}$	S	S	S
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	S	$\{a,c\}$	S	$\{a,c\}$	S	S
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	S	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	S	S	$\{b,c\}$	S
S	S	S	S	S	S	S	S	S

Πράξεις Συνόλων-Συμπλήρωμα

- Αν $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A - B = A$
- Αν $B \subseteq A$, τότε το σύνολο A - B συμβολίζεται με και ονομάζεται συμπληρωματικό (complement) του B ως προς το A (Το A συνήθως το ονομάζουμε σύμπαν)
- **Ιδιότητες**
  - $B \cup \overline{B} = A$
  - $B \cap \overline{B} = \emptyset$
  - $\overline{\overline{B}} = B$
  - $\overline{\emptyset} = A$
  - $\overline{A} = \emptyset$

Συμπλήρωμα



Νόμοι του De Morgan (De Morgan's laws)

- Πρώτος νόμος De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Δεύτερος νόμος De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Κάποιες Επιπλέον Ιδιότητες

$$A \cap U = A$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \varnothing = A$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$\overline{U} = \varnothing$$

$$\overline{\varnothing} = U$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Διατεταγμένο Ζεύγος (ordered pair)

- Ζεύγος στοιχείων που είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένη σειρά:

$$(a, b)$$

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a', b = b'$$

Καρτεσιανό Γινόμενο (Cartesian product)

Ακολουθία

– Κατάλογος αντικειμένων με καθορισμένη σειρά

– Παράδειγμα: (3, 6,9)

– Προσοχή: (3, 6, 9) ≠ (3, 9, 6), (3, 6,6, 9) ≠ (3, 6, 9)

- Ακολουθία με *k* αντικείμενα λέγεται ***k*-άδα**

– Ακολουθία με 2 αντικείμενα λέγεται **δυάδα** ή **ζεύγος**

Καρτεσιανό Γινόμενο (Cartesian product)

- Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

- Αν το σύνολο A έχει n στοιχεία και το σύνολο B έχει m στοιχεία, τότε τα σύνολα $A \times B$ και $B \times A$ έχουν $n \cdot m$ στοιχεία

Καρτεσιανό Γινόμενο (Cartesian product)

- **Συντομογραφία**

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{k φορές}} = A^k$$

- Όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών γράφονται

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N} = \{(i,j) | i,j \geq 1\}$$

Παράδειγμα

- **B = {a, b, c}**
  Γ = {1, 2, 3}

  B x Γ= {(a , 1) , (a , 2), (a , 3), (b , 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2) ,(c, 3)}}

- **A={1,2}**
  B={x, y, z}

  A × B={(1, x),(1, y),(1, z),(2, x),(2, y),(2, z)}

Καρτεσιανό Γινόμενο Πολλών Συνόλων

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$$

$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathrm{A},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Παράδειγμα

- Αν B = { 0, 1 } τότε

$$\mathrm{B}^{n} = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i = 0{,}1\}$$

- n-άδες της μορφής (0, 1, 1, 0, 0,..., 1)

Σύνολα

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $|A| = 5$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
- $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \ldots, (5, 5), (5, 7), (5, 9)\}$
- $A - B = \{2, 4\}$
- $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ (δυναμοσύνολο)

Σχέση (Relation)

- **Σχέση (relation)** R από το σύνολο S στο σύνολο T:

  $\Rightarrow$Ένα υποσύνολο του $S \times T$

  $\Rightarrow R \subseteq S \times T, (s, t) \in R$

- το στοιχείο s **σχετίζεται με το** στοιχείο t

  sRt

- Αν S=T, οπότε $R \subseteq S^2$: Σχέση στο σύνολο S

Παράδειγμα

- $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$
- $R = \{(s_{1,}, t_2), (s_2, t_1), (s_{2,}, t_2), (s_2, t_5), (s_{4,}, t_1), (s_4, t_4), (s_4, t_5)\} \subseteq S \times T$
- Πίνακας της σχέσης

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
 & & & & T & & \\
 & R & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\
\hline
 & s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
S & s_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & s_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

Κερδίζει	ΠΕΤΡΑ	ΨΑΛΙΔΙ	ΧΑΡΤΙ
ΠΕΤΡΑ	Ψ	Α	Ψ
ΨΑΛΙΔΙ	Ψ	Ψ	Α
ΧΑΡΤΙ	Α	Ψ	Ψ

- Η σχέση **Κερδίζει** (τυχαίνει να είναι και συνάρτηση) αναπαρίσταται από το σύνολο {(Π,Ψ),(Ψ,Χ),(Χ,Π)}

- Εκεί που γίνεται αληθές δηλαδή

Ανακλαστικότητα

- R σχέση στο σύνολο S
- **Ανακλαστική (reflexive)** σχέση:
- Για κάθε x ∈ S, ισχύει (x, x) ∈ R
- Ισοδύναμα: xRx

Συμμετρικότητα

- R σχέση στο σύνολο S
- Σχέση **συμμετρική (symmetric)**:
- Η παρουσία του (x, y) στο R συνεπάγεται και την παρουσία του (y, x) στο R, για κάθε x, y ∈ R

$$(x, y) \in \mathrm{R} \Rightarrow (y, x) \in R \text{ ή } xRy \Rightarrow yRx$$

Μεταβατικότητα

- R σχέση στο σύνολο S
- Σχέση μεταβατική (transitive):
- Η ταυτόχρονη παρουσία τω (x, y) και (y, z)
- στο R συνεπάγεται την παρουσία του στο R για κάθε $x, y, z \in R$

$$(x, y) \in R \text{ και } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

$$xRy \text{ και } yRz \Rightarrow xRz$$

Παραδείγματα

Ανακλαστική-Συμμετρική-Μεταβατική

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\} \quad \mathrm{A} \quad \mathrm{M}$$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\} \quad \mathrm{M}$$

$$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ή } a = -b\} \quad \mathrm{A} \ \Sigma \mathrm{M}$$

$$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\} \quad \mathrm{A} \Sigma \quad \mathrm{M}$$

$$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\} \ \Sigma$$

Συναρτήσεις (1/5)

- **Συνάρτηση**

– Ένα αντικείμενο που ορίζει έναν συσχετισμό μεταξύ ενός συνόλου «εισόδων» και ενός συνόλου «εξόδων»

- Δέχεται μια είσοδο και παράγει μια έξοδο: $\boldsymbol{f(a) = b}$

- Γράφουμε $f : D \rightarrow R$ για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει

– ως σύνολο δυνατών εισόδων το **D** (**πεδίο ορισμού**) και
– ως σύνολο δυνατών εξόδων το **R** (**πεδίο τιμών**)

Συναρτήσεις (2/5)

Συμβολισμός

$$f : S \rightarrow T, \quad f(s) = t$$

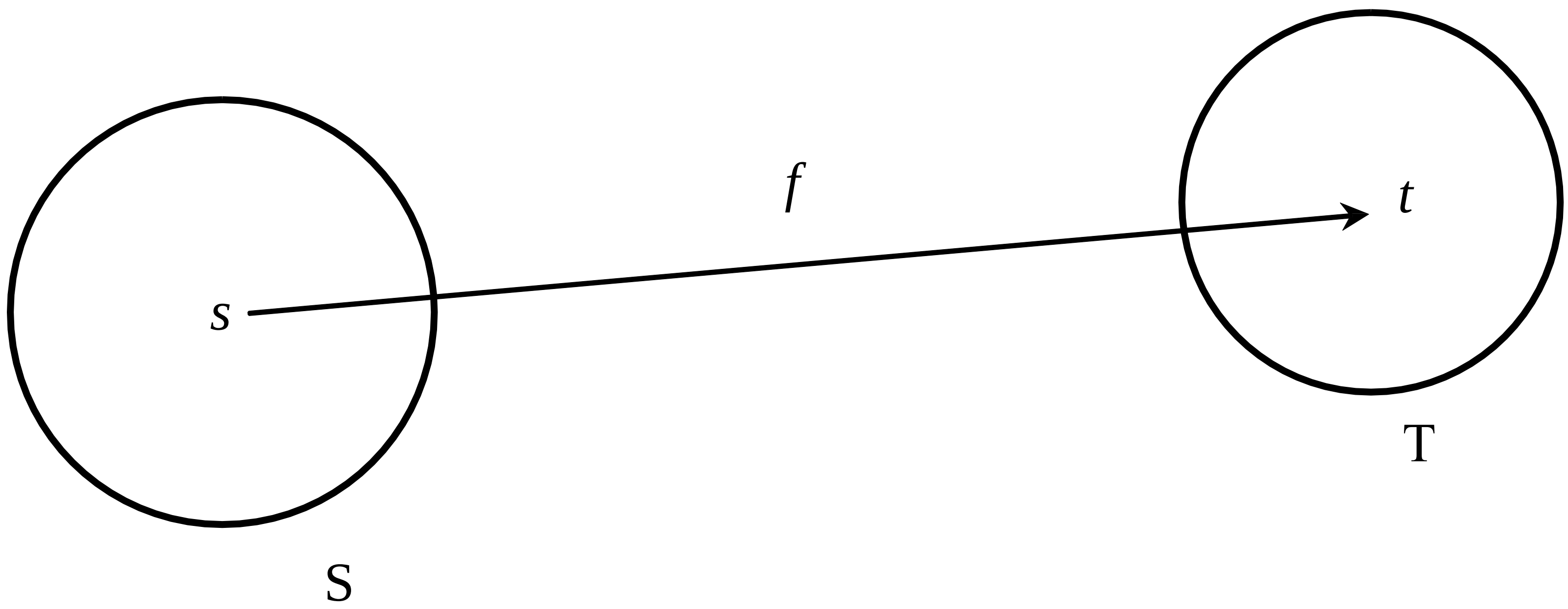
t ***εικόνα*** (image) του στοιχείου *s* κάτω από τη συνάρτηση *f*

S ***πεδίο ορισμού*** (domain)

T ***πεδίο τιμών*** (range)

Συναρτήσεις (3/5)

Συμβολισμός



Συναρτήσεις (4/5)

Παραδείγματα:

– *Απόλυτο*, | | : $Z \rightarrow Z$

- |-2 | = 2, | 64 | = 64

– *Πρόσθεση*, + : $Z \times Z \rightarrow Z$

- +(2, 48) = 50

Συναρτήσεις (5/5)

Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{A_1 \times . . . \times A_k . . . \times A_k}$, τότε κάθε είσοδος της συνάρτησης είναι μια ***k*-άδα** ($\boldsymbol{a_1,\ldots,\alpha^k}$), όπου για κάθε i, $a_i \in Ai$ είναι οι **παράμετροι** της συνάρτησης.

- Μία συνάρτηση ονομάζεται **διπαραμετρική**, αν οι είσοδοι της είναι ζεύγη

- Αναπαράσταση διπαραμετρικών συναρτήσεων:

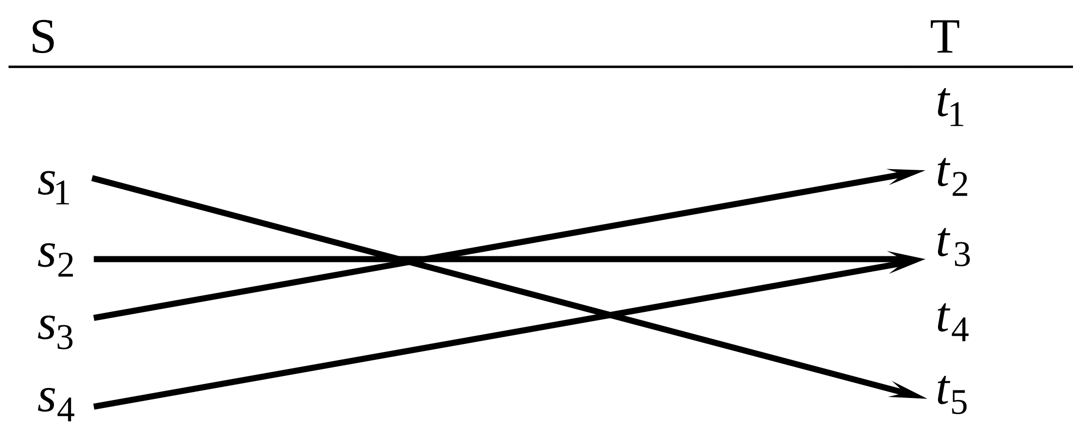
– **Ενθηματική**, π.χ. α + β

– **Προθηματική**, π.χ. +(α,β)

Παράδειγμα

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \qquad T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$f = \{(s_1, t_5), (s_2, t_3), (s_3, t_2), (s_4, t_3)\} \subseteq S \times T$$



Κατηγόρημα ή Ιδιότητα

- **Συνάρτηση** με πεδίο τιμών το σύνολο {ΑΛΗΘΕΣ, ΨΕΥΔΕΣ}
- Αν το πεδίο ορισμού είναι ένα σύνολο *k*-άδων τότε λέγεται *k*-μελής σχέση.
- Τα κατηγορήματα $P{:}D \rightarrow \{A, \Psi\}$ μπορούμε να τα αναπαριστούμε και με σύνολα αντί για συναρτήσεις

Κατηγόρημα ή Ιδιότητα

- **Συνάρτηση** με πεδίο τιμών το σύνολο {ΑΛΗΘΕΣ, ΨΕΥΔΕΣ}
- Αν το πεδίο ορισμού είναι ένα σύνολο *k*-άδων τότε λέγεται *k*-μελής σχέση.
- Τα κατηγορήματα $P{:}D \rightarrow \{A, \Psi\}$ μπορούμε να τα αναπαριστούμε και με σύνολα αντί για συναρτήσεις

Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.
- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064
- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369
- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Intoduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003
- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Αλέξανδρος Τζάλλας. Θεωρία Υπολογισμού.
Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.teiep.gr/courses/COMP112/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης

Άρτα, 2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Σύνολα & Σχέσεις (2/2)