Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 3 : **Γραφήματα & Αποδείξεις**

Αλέξανδρος Τζάλλας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 3 : Γραφήματα & Αποδείξεις

Αλέξανδρος Τζάλλας
Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σήμερα

- **Διαμέριση**
- **Γραφήματα (Γράφοι)**

  -Υπογράφημα, Κατηγορίες Γραφημάτων, Κατευθυνόμενο Γράφημα, Διαδρομές και Κύκλοι, Συνεκτικότητα, Δένδρα, Κατευθυνόμενα Γραφήματα & Σχέσεις

- **Λέξεις & Γλώσσες**
- **Αποδείξεις**

  -Είδη Αποδείξεων, Απόδειξη με Κατασκευή, Απαγωγή σε Άτοπο, Επαγωγή

Διαμέριση

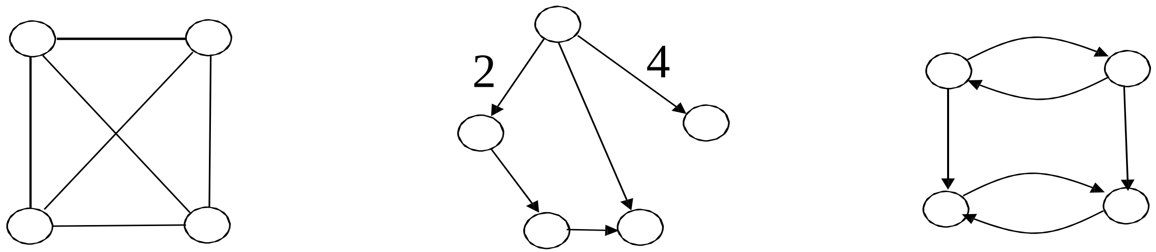
- Ενός μη κενού συνόλου A είναι ένα υποσύνολο Π του 2^A τέτοιο ώστε το $\varnothing$ να μην είναι στοιχείο του Π και κάθε στοιχείο του A να ανήκει σε έναν και μόνον ένα σύνολο του Π. Δηλαδή, το Π να είναι διαμέριση του A, αν το Π είναι ένα σύνολο υποσυνόλου του A τέτοιο ώστε:
  1) Κάθε στοιχείο του Π είναι μη κενό
  2) Τα μέλη του Π είναι ξένα μεταξύ τους
  3) $\cup\Pi=A$

Παράδειγμα

- Το {{a, b}, {c}, {d}} είναι διαμέριση του {a, b, c, d}, αλλά το {{b,c}, {c,d}} δεν είναι
- Τα σύνολα των άρτιων και περιττών φυσικών αριθμών σχηματίζουν μια διαμέριση του N

Κατηγορίες Γραφημάτων

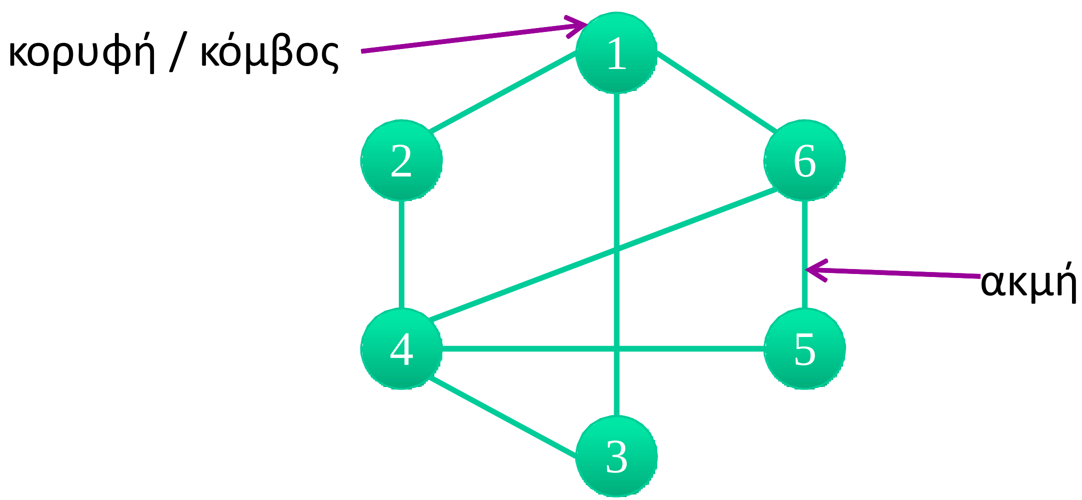
- Ένα γράφημα ονομάζεται **κατευθυνόμενο ή κατευθυντό** (directed graph) αν κάθε μια από τις ακμές του είναι προσανατολισμένη προς μία κατεύθυνση.
- Ένα γράφημα ονομάζεται **μη-κατευθυνόμενο** ή ακατεύθυντο (undirected) αν οι ακμές του δεν είναι προσανατολισμένες.
- Συχνά συσχετίζουμε κάθε ακμή ενός γραφήματος με κάποιο βάρος (weight). Τότε το γράφημα ονομάζεται **γράφημα με βάρη** ή **ενεπίγραφο** γράφημα (weighted graph).
- Παραδείγματα



Γραφήματα (Γράφοι)

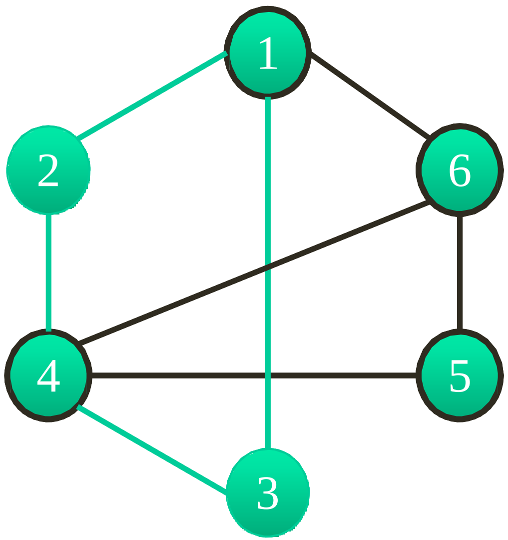
- Ένα γράφημα αποτελείται από
  - ένα σύνολο V κορυφών (vertices), ή κόμβων , και
  - ένα σύνολο E ακμών (edges). Μια ακμή είναι ένα ζεύγος (u,v) από κορυφές.

- Παράδειγμα. Το πιο κάτω σχήμα αναπαριστά το γράφημα G = (V, E) με
  - V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και E={(1, 2), (1, 3), (1, 6),(2, 4),(3, 4),(4, 5),(4, 6),(5, 6)}

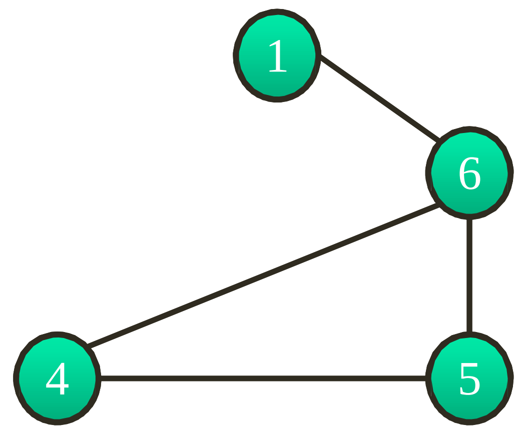


Υπογράφημα

- Έστω G=(V, E) και G΄= (V΄, E΄) γραφήματα, όπου $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Τότε το γράφημα G΄ είναι ***υπογράφημα*** (subgraph) του γραφήματος G
- Παράδειγμα: Το γράφημα G' είναι υπογράφημα του γραφήματος G



G



G' = (V', E')
V' = {1,4,5,6}
E'= {(1,6), (4,5), (4,6), (5,6)}

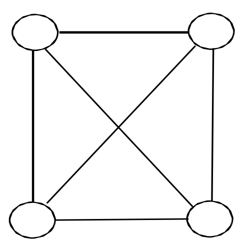
Κατηγορίες Γραφημάτων

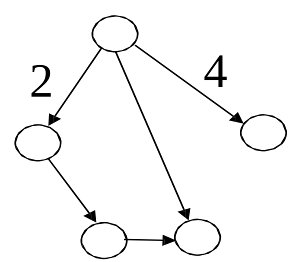
- Ένα γράφημα ονομάζεται **κατευθυνόμενο ή κατευθυντό** (directed graph) αν κάθε μια από τις ακμές του είναι προσανατολισμένη προς μία κατεύθυνση.

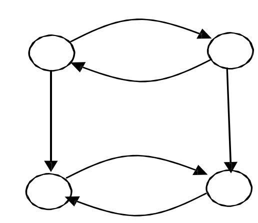
- Ένα γράφημα ονομάζεται **μη-κατευθυνόμενο** ή ακατεύθυντο (undirected) αν οι ακμές του δεν είναι προσανατολισμένες.

- Συχνά συσχετίζουμε κάθε ακμή ενός γραφήματος με κάποιο βάρος (weight). Τότε το γράφημα ονομάζεται **γράφημα με βάρη** ή **ενεπίγραφο** γράφημα (weighted graph).

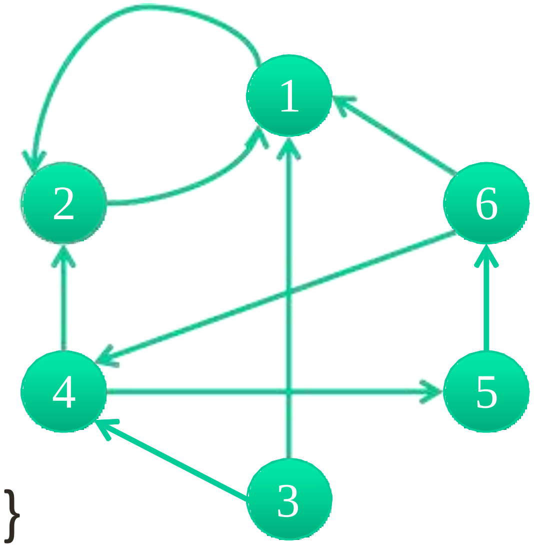
- Παραδείγματα







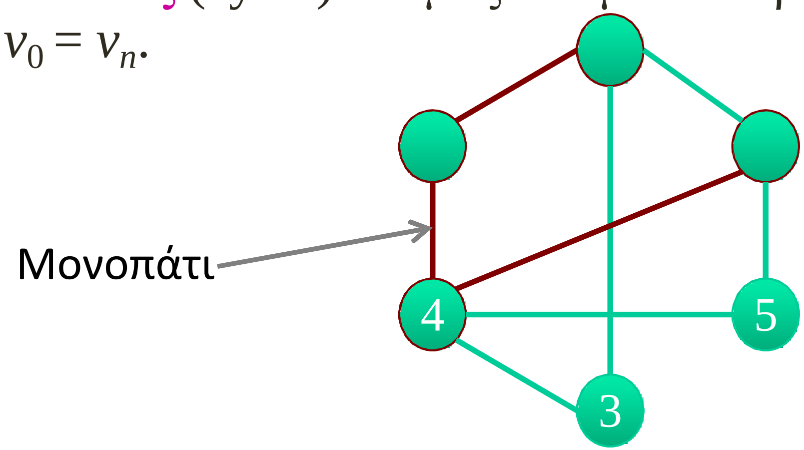
Κατευθυνόμενο Γράφημα

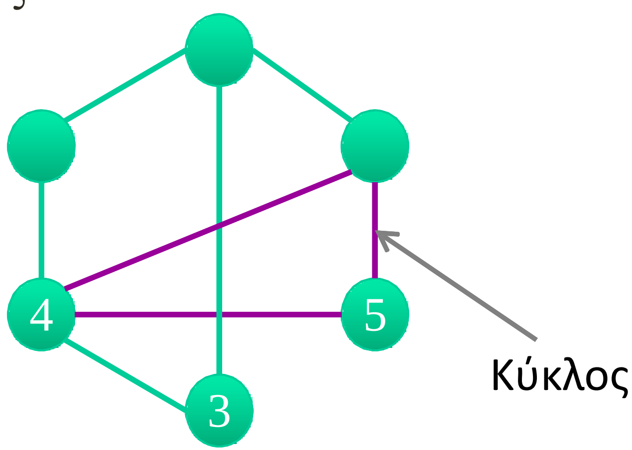


- G = (V,E)
  - V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - E={(1,2), (2,1), (4,2), (4,5), (3,4), (3,1), (5,6), (6,4), (6,1)}
- Στα κατευθυνόμενα γραφήματα η σειρά με την οποία αναφέρονται οι κόμβοι έχει σημασία. Η ακμή (6,1) υπονοεί την ύπαρξη ακμής *από* την κορυφή 6 *προς* την κορυφή 1

Διαδρομές και Κύκλοι

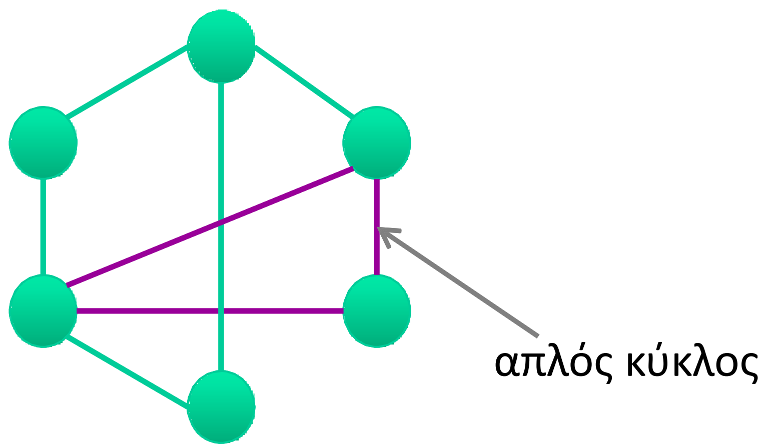
- **Μονοπάτι** ή **διαδρομή** (path) ενός γραφήματος είναι μια ακολουθία κόμβων $v_0, v_1, \ldots, v_n$, όπου για κάθε i , $0 \le i < n$, (v_i , v_{i+1}) είναι ακμή του γραφήματος
- Μια διαδρομή ενός γραφήματος ονομάζεται **απλή** (simple) αν όλες οι κορυφές της είναι διαφορετικές μεταξύ τους, εκτός από την πρώτη και την τελευταία οι οποίες μπορούν να είναι οι ίδιες.
- **Κύκλος** (cycle) ονομάζεται μια διαδρομή με μήκος >1 που ικανοποιεί $v_0 = v_n$.





Κύκλος

- **Κύκλος** εάν ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος μια διαδρομής ταυτίζονται
- **Απλός κύκλος** είναι κάθε κύκλος που περιέχει τρείς τουλάχιστον κόμβους, από τους οποίος ταυτίζονται μόνο ο πρώτος και ο τελευταίος



Συνεκτικότητα

- Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται **συνεκτικό** (connected) αν για κάθε ζευγάρι κορυφών υπάρχει διαδρομή που τις συνδέει

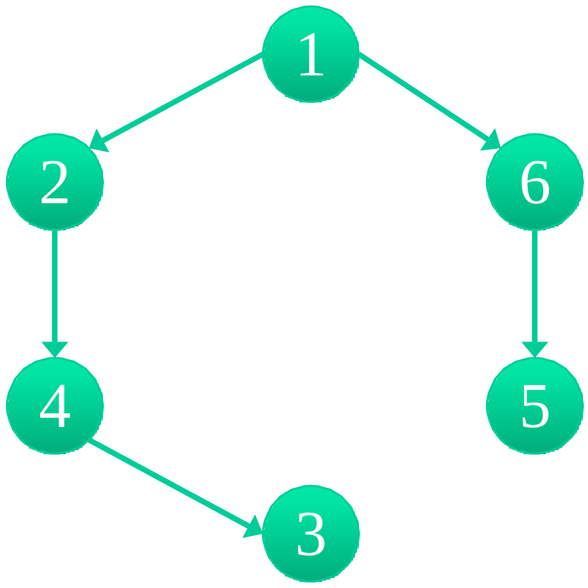
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα ονομάζεται **ισχυρά συνεκτικό** (strongly connected)

- Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Αν το μη-κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο αντιστοιχεί είναι συνεκτικό, τότε το γράφημα ονομάζεται **ελαφρά συνεκτικό** (weakly connected)

Δέντρα

- Δέντρο: Γράφημα *χωρίς* κύκλους

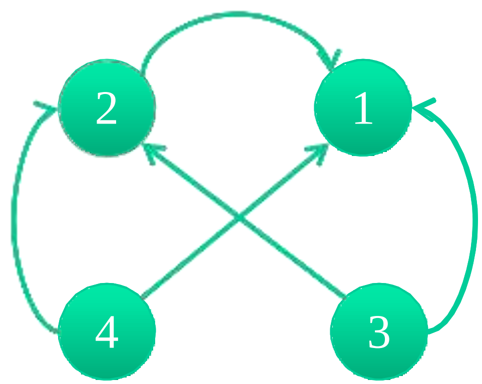
- Ρίζα και φύλλα



Κατευθυνόμενα Γραφήματα & Σχέσεις

- Τα κατευθυνόμενα γραφήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση διμελών σχέσεων:
  - Μία σχέση $R \subseteq D \times D$ αναπαρίσταται από τον γράφο $G = (D, E)$ όπου $E - \{(x, y)|xRy\}$

- Παράδειγμα
  - A = { 1, 2, 3, 4}
  - R : > *«μεγαλύτερο από»*



Λέξεις και Γλώσσες (1/4)

- **Αλφάβητο Σ**: Ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο συμβόλων
  Παράδειγμα:
  – $\Sigma_1 = \{0,1\}$ - δυαδικό αλφάβητο
  – $\Sigma_2 = \{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\chi,\psi,\omega\}$ – ελληνικό αλφάβητο
- **Λέξη** επί ενός αλφαβήτου:
  Οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου
  Παραδείγματα λέξεων:
  – 011001 πάνω στο Σ1
  – καλημέρα πάνω στο Σ2
- **Γλώσσα**: Οποιοδήποτε σύνολο λέξεων

Λέξεις και Γλώσσες (2/4)

- **Μήκος λέξης**: Πλήθος των συμβόλων που περιέχει $|w|$
- **Κενή λέξη**: Λέξη μηδενικού μήκους, ε
- Μια λέξη w μήκους n μπορεί και να γραφτεί ως:

$$w = w_1\, w_2 \ldots\, w_n$$

- Η ανάστροφη της λέξης $w = w_1\, w_2 \ldots\, w_n$ συμβολίζεται ως $w^{\mathcal{R}}$ και είναι η λέξη που προκύπτει αν γράψουμε τα σύμβολα της w σε αντίστροφη σειρά. Δηλαδή,

$$w^{\mathcal{R}} = w_n\, w_{n-1} \ldots\, w_1$$

Λέξεις και Γλώσσες (3/4)

- Η z είναι **υπολέξη** της λέξης w αν και μόνο αν εμφανίζεται αυτούσια μέσα στην w
  - Οι λέξεις *καλ, λη* και *μερα* είναι **υπολέξεις** της λέξης *καλημερα*

- Αν $x = x_1x_2 \ldots x_m$ και $y = y_1y_2 \ldots y_n$, η συναρμογή των λέξεων x και y συμβολίζεται ως xy και είναι η λέξη που προκύπτει αν συνάψουμε τη λέξη y στη λέξη x:

$$xy = x_1x_2 \ldots x_m\, y_1y_2 \ldots y_n$$

Λέξεις και Γλώσσες (4/4)

- Για μια λέξη w γράφουμε w^k για τη συναρμογή της λέξης w για k συνεχόμενες φορές.

- **Λεξικογραφική διάταξη** λέξεων είναι η συνήθης διάταξη που παρατηρείται στα λεξικά με τη διαφορά ότι οι βραχύτερες λέξεις προηγούνται των μακρύτερων
  – Λεξικογραφική διάταξη όλων των λέξεων επί του αλφαβήτου {0,1}

{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, ...}

Αποδείξεις

Ορολογία

- **Ορισμός**: περιγράφει με ακρίβεια αντικείμενα και έννοιες
- **Μαθηματικές Προτάσεις**: δηλώσεις για τα αντικείμενα υπό μελέτη
- **Απόδειξη**: ακολουθία επιχειρημάτων υπέρ της ισχύος μιας πρότασης
- **Θεώρημα**: μια μαθηματική πρόταση που έχει αποδειχθεί αληθής
- **Λήμμα**: βοηθητικές προτάσεις που έχουν αποδειχθεί αληθείς
- **Πόρισμα**: προτάσεις που έπονται από θεωρήματα

{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, …}

Είδη Αποδείξεων

- Με κατασκευή (κατασκευαστικές)
- Με απαγωγή σε άτοπο (αντίφαση)
- Με επαγωγή

Απόδειξη με Κατασκευή

- Εφαρμόζεται όταν η πρότασή μας ισχυρίζεται την ύπαρξη αντικειμένων κάποιου συγκεκριμένου τύπου
  – Περιγράφουμε πως μπορεί να κατασκευαστεί το αντικείμενο

- **Παράδειγμα**

  Θεώρημα: Για κάθε άρτιο αριθμό n μεγαλύτερο από 2, υπάρχει 3-κανονικό (κάθε κόμβος έχει βαθμό 3) γράφημα με n κόμβους

  Απόδειξη:

Απαγωγή σε Άτοπο (Αντίφαση)

- Υποθέτουμε ότι η μαθηματική πρόταση δεν ισχύει και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η υπόθεση μας οδηγεί σε εσφαλμένο συμπέρασμα, άτοπο

- **Παράδειγμα**

  Θεώρημα: Ο αριθμός 2 είναι άρρητος

  Απόδειξη:

Επαγωγή (1/2)

Στόχος

Να αποδειχτεί ότι η (μαθηματική) πρόταση Π(n) ισχύει για κάθε $n \geq 0$

Μέθοδος

1. Βασική/Εναρκτήρια Περίπτωση: Επαληθεύουμε πως η Π ισχύει για $n = 0$,
2. Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε πως η Π ισχύει για $n = k$ και
3. Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε πως η Π ισχύει για $n = k+1$

Επαγωγή (2/2)

Παραλλαγές

- Αντί του 0, σε ορισμένες περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε για $n \geq a$, όπου το a είναι κάποιος ακέραιος

- Στο δεύτερο βήμα: Υποθέτουμε πως η Π ισχύει για $n \leq k$ και αποδεικνύουμε πως η Π ισχύει για $n = k+1$

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ για κάθε $n \geq 0$.

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής την πρόταση

$$\Pi(\mathrm{n}) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} .$$

1. Προφανώς η Π(0) ισχύει αφού $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$.
2. Υποθέτουμε ότι ισχύει η Π(k), δηλαδή ότι $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$.
3. Και θα αποδείξουμε ότι ισχύει η Π(k+1):

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) = \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad \square$$

Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.
- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ITE-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064
- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369
- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Intoduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003
- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Αλέξανδρος Τζάλλας. Θεωρία Υπολογισμού.
Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.teiep.gr/courses/COMP112/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Γραφήματα & Αποδείξεις

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ