Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 4 : **Λογικά Επιχειρήματα, Αλφάβητα & Γλώσσες (1/2)**

Αλέξανδρος Τζάλλας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 4 : Λογικά Επιχειρήματα, Αλφάβητα & Γλώσσες (1/2)

Αλέξανδρος Τζάλλας
Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σύνοψη-Σύνολα

- Στο προηγούμενές διαλέξεις αναφερθήκαμε σε μερικά από τα βασικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται τόσο στα Μαθηματικά όσο και στην Επιστήμη των Υπολογιστών
- Αρχίσαμε τη συζήτησή μας με τα **σύνολα** που δεν είναι παρά **συλλογές διακριτών αντικειμένων**
- Δύο βασικά σύνολα είναι το **κενό**, το οποίο δεν περιέχει καθόλου στοιχεία, και το **δυναμοσύνολο** που αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα ενός συνόλου
- Η **ένωση δύο συνόλων** αποτελείται από τα στοιχεία των επιμέρους συνόλων χωρίς επαναλήψεις όμως, **η τομή από τα κοινά στοιχεία** αυτών και **το συμπλήρωμα** από εκείνα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο σύνολο, αλλά ανήκουν σε ένα σύμπαν **U**

Σύνοψη-Συναρτήσεις

- Στη συνέχεια παρουσιάσαμε τις **συναρτήσεις**
- Μια **συνάρτηση f** από ένα **σύνολο A** σε ένα **σύνολο B** αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο x του A ένα μοναδικό στοιχείο από το B, το οποίο λέγεται εικόνα του x και συμβολίζεται με **f(x)**
- Μία συνάρτηση **f** λέγεται **ένα προς ένα**, αν δύο διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B
- Η **f λέγεται επί**, αν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου x του A
- Τέλος, η **f είναι αντιστοιχία** αν είναι ένα προς ένα και επί
- Σε αυτή την περίπτωση έχει νόημα να μιλάμε για την αντίστροφη της f η οποία συμβολίζεται f^{-1}
- Αν **y ανήκει στο B** τότε $f^{-1}(y)$ είναι το **μοναδικό x του A** για το οποίο ισχύει **f(x) = y**

Σύνοψη-Σχέσεις

- Αλλά ενώ μια συνάρτηση αντιστοιχεί σε κάθε x του A ένα μοναδικό y του B, μια **σχέση R** επιτρέπει την αντιστοίχηση περισσότερων ή και κανενός στοιχείων από το B
- Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το **x** σχετίζεται με το **y** και γράφουμε **xRy**
- Μια σχέση **R** λέγεται **ανακλαστική**, αν κάθε **x** σχετίζεται με τον εαυτό του, δηλαδή **xRx**
- Η **R** είναι **συμμετρική** αν, όποτε ισχύει **xRy**, τότε ισχύει και **yRx**
- Η **R** είναι **μεταβατική**, αν όποτε ισχύουν τα **xRy** και **yRz**, τότε ισχύει και το **xRz**
- Τέλος, η **R** είναι σχέση ισοδυναμίας, αν έχει και τις τρεις παραπάνω ιδιότητες

Σύνοψη-Γραφήματα & Δένδρα

- Ένα **γράφημα** δεν είναι παρά ένα σύνολο από **κόμβους ή κορυφές** που συνδέονται μεταξύ τους με **ακμές** ή **πλευρές**
- Το **γράφημα** λέγεται κατευθυνόμενο, αν η κατεύθυνση της **πλευράς έχει σημασία**
- Ένα μονοπάτι σε ένα γράφημα δεν είναι παρά μία ακολουθία από κόμβους που συνδέονται μεταξύ τους με πλευρές
- Τέλος, ένα δέντρο είναι ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** που έχει τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

  α) υπάρχει ένας κόμβος που λέγεται ρίζα και από τον οποίο ξεκινά ένα μονοπάτι προς κάθε άλλο κόμβο &

  β) κάθε κόμβος εκτός από τη ρίζα δέχεται μια πλευρά από κάποιο άλλο κόμβο

Σήμερα

- **Επαναληπτικές Ασκήσεις**
- **Λογικά Επιχειρήματα & Αποδείξεις**

  -Ισχυρισμοί

  - Κανόνες Απλούστευσης Ισχυρισμών

  - Λογική

  - Ποσοδείκτες

  - Παραδείγματα
- **Αλφάβητα & Γλώσσες**
- **Πεπερασμένη Αναπαράσταση γλωσσών**

Επαναληπτική Άσκηση 1

Έστω Α το σύνολο των αυτοκινήτων. Θεωρήστε τη σχέση R πάνω στο Α έτσι ώστε το (a, b) να ανήκει στην R, αν το αυτοκίνητο a είναι πιο γρήγορο και κοστίζει λιγότερο από το αυτοκίνητο b. Τι θα μπορούσατε να πείτε για την R;

Είναι ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική;

Επαναληπτική Άσκηση 1-Λύση

- Για να είναι η **R συμμετρική** θα πρέπει **για κάθε αυτοκίνητο a** να έχουμε **aRa**, το οποίο μεταφράζεται ότι το a **είναι πιο γρήγορο και κοστίζει λιγότερο** από τον εαυτό του

  Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι δυνατό

  Άρα η **R δεν είναι ανακλαστική**
- Αν το αυτοκίνητο **a είναι πιο γρήγορο και κοστίζει λιγότερο από ένα αυτοκίνητο b**, δηλαδή **aRb**, δεν μπορεί να ισχύει το ίδιο και για το b

  Άρα **η σχέση δεν είναι ούτε συμμετρική**
- Από αυτό φαίνεται ότι μόνο ένα εκ των δύο ζευγών (a, b), (b, a) μπορεί να ανήκει στην R. **Αυτό κάνει τη σχέση αντισυμμετρική**
- Τέλος, **η σχέση είναι και μεταβατική**. Αν το a είναι πιο γρήγορο από το b και το b είναι πιο γρήγορο από το c, τότε το a είναι πιο γρήγορο από c. Αντίστοιχα, αν το a κοστίζει λιγότερο από το b και αυτό λιγότερο από το c, τότε και το a κοστίζει λιγότερο από το c. **Άρα αν, aRb και bRc, τότε aRc**

Επαναληπτική Άσκηση 2

Έστω A το σύνολο {x, y, z} και B το {x, y}.

- Είναι το A υποσύνολο του B;
- Είναι το B υποσύνολο του A;
- Ποιο είναι το σύνολο A U B;
- Ποιο είναι το σύνολο A $\cap$ B;
- Ποιο είναι το σύνολο A x B;
- Ποιο είναι το δυναμοσύνολο του B;

Λογικά Επιχειρήματα & Αποδείξεις

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα ασχοληθούμε με **ιδιότητες των γλωσσών & των αφηρημένων μηχανών** όπως αυτές προκύπτουν από τους ορισμούς τους

- Η διαδικασία της απόδειξης έχει ως εξής:
  1) **πρώτα διατυπώνουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε** &
  2) **με λογικά επιχειρήματα αποδεικνύουμε την αλήθεια (ή όχι) του ισχυρισμού μας**

- Μια καλή απόδειξη **πείθει τον αναγνώστη ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό**, αλλά τον βοηθά επίσης να καταλάβει γιατί είναι σωστό και να το συνδέσει με την υπόλοιπη θεωρία **≠** Μια κακή α**πόδειξη πάλι πείθει για το αποτέλεσμα**, αλλά δε βοηθά τον αναγνώστη να βάλει τα πράγματα σε μια προοπτική
- Θα πρέπει να κατασκευάζουμε **«καλές»** αποδείξεις, κάτι τέτοιο απαιτεί συνεχή εξάσκηση, αλλά θα δούμε μερικούς από τους βασικούς τύπους αποδείξεων & θα μάθουμε πώς λειτουργούν

Ισχυρισμοί (1/2)

- Τα βασικά αντικείμενα στη λογική είναι οι **ισχυρισμοί** που παίρνουν κάποια **τιμή αληθείας**, μπορούν δηλαδή να είναι **αληθείς ή ψευδείς** αλλά όχι και τα δύο

*__Παράδειγμα:__

1. Ο ισχυρισμός: **0 < 1** είναι **αληθής**, ενώ ο: **1 < 0** είναι **ψευδής**

2. Η τιμή αληθείας του ισχυρισμού **x < 5** εξαρτάται από τη **μεταβλητή x**
   -Αν το x είναι φυσικός αριθμός και έχει μία από τις τιμές {0, 1, 2, 3, 4} τότε ο προηγούμενος ισχυρισμός είναι αληθής
   - Αντιθέτως είναι ψευδής

Το σύνολο των τιμών που καθιστούν έναν ισχυρισμό αληθή λέγεται σύνολο αληθείας

Ισχυρισμοί (2/2)

- Οι ισχυρισμοί όμως δεν περιορίζονται μόνο σε ιδιότητες αριθμών

*__Παράδειγμα:__

- Ο ισχυρισμός:

«Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος»

είναι αληθής, αν φυσικά μιλάμε για τον ***άνθρωπο* Σωκράτη**

- Αν όμως έχουμε ονομάσει Σωκράτη το αγαπημένο μας κατοικίδιο τότε ο ισχυρισμός είναι ψευδής

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι η τιμή αληθείας εξαρτάται πάντα από το περιεχόμενο του κειμένου ή για να είμαστε πιο ακριβείς από κάποιο σύμπαν U, από το οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές.

Συνεπάγεται ⇒

- Αν p και q είναι δύο ισχυρισμοί, θα λέμε ότι ο **p συνεπάγεται τον q** (ή **p** ⇒ **q**), αν η αλήθεια του q προκύπτει από την αλήθεια του p

*__Παράδειγμα:__

-Ο ισχυρισμός:

«*Η θερμοκρασία ήταν κάτω από τους* 0^0C» συνεπάγεται τον «*Το νερό έγινε πάγος*»

- Αν όμως p = “2 < 3” και q = “Είναι πρωί” τότε ο p δεν συνεπάγεται τον q, αφού η αλήθεια του δεύτερου δεν προκύπτει με κανένα τρόπο από την αλήθεια του πρώτου

Συνεπάγεται ⇒

- Αν p και q είναι δύο ισχυρισμοί, θα λέμε ότι ο **p συνεπάγεται τον q** (ή **p** ⇒ **q**), αν η αλήθεια του q προκύπτει από την αλήθεια του p

*__Παράδειγμα:__

-Ο ισχυρισμός:

«*Η θερμοκρασία ήταν κάτω από τους* 0^0C» συνεπάγεται τον «*Το νερό έγινε πάγος*»

- Αν όμως p = “2 < 3” και q = “Είναι πρωί” τότε ο p δεν συνεπάγεται τον q, αφού η αλήθεια του δεύτερου δεν προκύπτει με κανένα τρόπο από την αλήθεια του πρώτου

Ισοδυναμεί ⇔

- Δύο ισχυρισμοί p και q θα λέγονται λογικά ισοδύναμοι (ή p ⇔ q), “p , q" αν ο καθένας συνεπάγεται τον άλλο

***Παράδειγμα:**

-Οι ισχυρισμοί:

«*Γεννήθηκα το 1967*» και «*Θα είμαι 47 χρονών το 2014*» είναι ισοδύναμοι

Λογικό ΚΑΙ ^ & Λογικό Η v (1/4)

- Οι σύνδεσμοι και και ή παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στο σχηματισμό σύνθετων ισχυρισμών ξεκινώντας από δύο απλούστερους

- Στην περίπτωση του και (θα το συμβολίζουμε με ^), ο σύνθετος ισχυρισμός p^q είναι αληθής, αν και μόνο αν και ο p και ο q είναι αληθείς

Πίνακας αληθείας

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

*Η στήλη p^q παίρνει την τιμή T (αληθής) μόνο στην περίπτωση που και οι δύο p και q έχουν την τιμή T

*Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις παίρνει την τιμή F (ψευδής)

Λογικό ΚΑΙ ^ & Λογικό Η v (2/4)

***Παράδειγμα:**

-Ο ισχυρισμός:

«Οι άνθρωποι έχουν δύο χέρια ***και*** οι γάτες τέσσερα πόδια»

είναι αληθής αφού οι επιμέρους ισχυρισμοί είναι αληθείς

Λογικό ΚΑΙ ^ & Λογικό Η v (3/4)

Στην περίπτωση του ***ή*** (θα το συμβολίζουμε με **v**), ο σύνθετος ισχυρισμός p **v** q είναι αληθής, αν ένας τουλάχιστον από τους p και q είναι αληθής

Πίνακας αληθείας

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

***Παράδειγμα:**

-Ο ισχυρισμός:

«Οι άνθρωποι έχουν δύο χέρια ***ή*** οι γάτες πετάνε»

είναι αληθής αφού ο ισχυρισμός «Οι άνθρωποι έχουν δύο χέρια» είναι αληθής

Λογικό ΟΧΙ ¬(4/4)

- Η χρήση του ***όχι*** (θα συμβολίζεται με **¬**) αντιστρέφει την τιμή αληθείας ενός ισχυρισμού

Ο ισχυρισμός **¬**p (ή $\overline{\mathrm{p}}$) είναι αληθής, αν και μόνο αν ο p είναι ψευδής

Κανόνες Απλούστευσης Ισχυρισμών

- Όπως και στην περίπτωση των συνόλων έτσι & εδώ υπάρχουν κάποιοι κανόνες απλούστευσης πολύπλοκων εκφράσεων ισχυρισμών
- Οι κανόνες αυτοί προκύπτουν, αν αλλάξουμε τα ∪**,** ∩ και **‘(συμπλήρωμα**) με **^, V** και ¬ αντίστοιχα:

Νόμοι Συνόλων

Αντιμεταθετικότητα	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Προσεταιριστικότητα	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Επιμεριστικότητα	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
Νόμοι *De Morgan*	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
Συμπλήρωμα και κενό σύνολο	$(A')' = A$, $A \cap A' = \varnothing$ και $A \cup A' = U$
	$A \cup \varnothing = A$ και $A \cap \varnothing = \varnothing$

Σύνδεσμος → (1/3)

- Ένας άλλος τρόπος κατασκευής πολύπλοκων εκφράσεων προκύπτει χρησιμοποιώντας το σύνδεσμο →

- Με p → q συμβολίζουμε την έκφραση ”αν p, τότε q“

* **Ποια όμως είναι η τιμή αληθείας ενός τέτοιου ισχυρισμού**;

- Ο p → q είναι αληθής, αν και μόνο αν ο p είναι ψευδής ή ο q είναι αληθής
- Για να βρούμε λοιπόν την τιμή αληθείας του p → q διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Έστω ότι ο p είναι αληθής. Τότε για να είναι ο p → q αληθής πρέπει και ο q να είναι αληθής
2. Έστω ότι ο p είναι ψευδής. Τότε ο p → q είναι αληθής άσχετα από την τιμή του p

Σύνδεσμος → (2/3)

***Παράδειγμα:**

Έστω p και q αντίστοιχα οι ισχυρισμοί “**ανιχνεύτηκε καπνός**" και “**χτύπησε ο συναγερμός**". Θεωρήστε τώρα την έκφραση “**αν ανιχνεύτηκε καπνός, τότε χτύπησε ο συναγερμός**". Ποια είναι η τιμή αληθείας ενός τέτοιου ισχυρισμού;

***Απόδειξη:**

-Είναι ξεκάθαρο ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής, αν ο συναγερμός χτύπησε μόλις ανιχνεύτηκε καπνός (**και ο p και ο q είναι αληθείς**)
-Είναι επίσης φανερό ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αν συναγερμός δε χτύπησε παρότι ανιχνεύτηκε καπνός (**ο p είναι αληθής αλλά ο q ψευδής**)

Τί γίνεται όμως στην περίπτωση που δεν ανιχνεύτηκε καπνός (p ψευδής);

-Σε αυτή την περίπτωση ο ισχυρισμός **δεν μπορεί να είναι ψευδής**, άσχετα με το αν χτύπησε ή όχι ο συναγερμός
-Για το λόγο αυτό ο p → q ορίζεται να είναι πάντα αληθής εκτός από την περίπτωση που είναι φανερά ψευδής: να ισχύει δηλαδή το p και να μην ισχύει το q

Σύνδεσμος → (3/3)

***Απόδειξη:**

Πίνακας αληθείας p → q

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

-Από την ανάλυση προκύπτει ότι

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q),$$

δηλαδή ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι λογικά ισοδύναμοι

-Ένας από τους πιο διαδεδομένους είναι η έκφραση "**p μόνο αν q**"

-Άλλοι φαίνονται στη συνέχεια:

"όχι p εκτός αν q"
"q προκύπτει από το p"
"p είναι ικανό για το q"
"q είναι αναγκαίο για το p"

Διαφορά “$\Rightarrow$” με “$\rightarrow$” (2/2)

***Παράδειγμα:**

Θεωρούμε τους ισχυρισμούς:

p = “Μία πεταλούδα πέταξε στο Πεκίνο" και

q = “Τον Ιούλιο του 2001 εξερράγη το ηφαίστειο Αίτνα"

***Απόδειξη:**

-**Είναι προφανές ότι p $\rightarrow$ q ,** αλλά σε καμιά περίπτωση δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η έκρηξη της Αίτνας οφείλεται στο πέταγμα μιας πεταλούδας, ή αλλιώς ότι p $\Rightarrow$ q

-Η διαφορά λοιπόν μεταξύ των $\rightarrow$ και $\Rightarrow$ έγκειται στο ότι, το πρώτο δεν έχει σχέση με την ουσία αυτών που ισχυριζόμαστε, ενώ το δεύτερο συλλαμβάνει ακριβώς την αλήθεια των ισχυρισμών μας

Ισχυρισμός “↔”

- Άλλος ένας σημαντικός ισχυρισμός είναι ο $p \leftrightarrow q$ που διαβάζεται “p *αν και μόνο αν* q" και αποτελεί συντομογραφία της έκφρασης $(p \rightarrow q)\wedge(q \rightarrow p)$

- Για να είναι ο ισχυρισμός αυτός αληθής, τα p και q πρέπει να είναι και τα δύο αληθή ή και τα δύο ψευδή

- Για να βρούμε την τιμή αληθείας ενός τέτοιου ισχυρισμού συνήθως τον χωρίζουμε στα δύο κομμάτια $p \rightarrow q$ και $q \rightarrow p$ και δουλεύουμε το κάθε κομμάτι χωριστά

- Από τη μέχρι τώρα συζήτηση προκύπτει ότι, αν ο ισχυρισμός $p \rightarrow q$ είναι *αληθής*, τότε είναι αδύνατο να ισχύει το p και να μην ισχύει το q (αλλά αυτό είναι το ίδιο σαν να λέμε ότι όταν ο p είναι αληθής, ο q είναι αληθής ή αλλιώς $p \Rightarrow q$)

Παράδειγμα 1

- Οι τιμές αληθείας ενός σύνθετου ισχυρισμού μπορούν να διαπιστωθούν κατασκευάζοντας βήμα προς βήμα τον πίνακα αληθείας του

  Αν $((p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \rightarrow p$

  είναι ένας σύνθετος ισχυρισμός, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα και βρείτε με ποιον απλούστερο ισχυρισμό είναι αυτός ισοδύναμος.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$((p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \rightarrow p$
F	F						
F	T						
T	F						
T	T						

Λύση 1

- * Συμπληρώνουμε τις στήλες από αριστερά προς τα δεξιά χρησιμοποιώντας ανάλογα με την περίπτωση τους πίνακες αληθείας των ^, V και →

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$((p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \rightarrow p$
F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T

- Ο p ^ q είναι αληθής όταν ***και*** οι δύο επιμέρους ισχυρισμοί είναι αληθείς, ο p $_V$ q όταν *κάποιος* από τους δύο είναι αληθής, και ο p → q όταν ο p είναι ψευδής ή ο q αληθής
- Συγκρίνοντας την τελική στήλη με τον πίνακα αληθείας των p $_V$ q, βλέπουμε ότι οι δεξιές στήλες και στους δύο πίνακες έχουν ακριβώς τις ίδιες τιμές (από αυτό συμπεραίνουμε ότι οι ισχυρισμοί ((p^q) V ($\bar{p}$ ^ $\bar{q}$)) → p και p $_V$ q είναι ισοδύναμοι)

Αντίφαση

- Κάποιος λοιπόν μπορεί να βρει την αλήθεια μιας πρότασης της μορφής $\mathbf{p \rightarrow q}$ πέφτοντας σε **αντίφαση**, να υποθέσει δηλαδή ότι δεν ισχύει το q, ενώ ισχύει το p, και να καταλήξει σε κάποια ασυνέπεια (για παράδειγμα ότι δεν ισχύει το p)

Παράδειγμα 2

* Έστω m και n δύο ακέραιοι αριθμοί. Ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι:

“*αν* το γινόμενό τους **mn** είναι περιττός, *τότε* και οι **m** και **n** είναι περιττοί"

Λύση 2 (1/2)

*Ας αρχίσουμε λέγοντας ακριβώς τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένας αριθμός είναι περιττός:

- Ένας αριθμός **m** είναι περιττός, αν μπορεί να γραφεί στη μορφή **m = 2k +1** για κάποιο ακέραιο **k**

- Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι ο ισχυρισμός p → q είναι αληθής, όπου p =“**το γινόμενό mn είναι περιττός**" και q =“**οι m και n είναι περιττοί**“

- Ας υποθέσουμε, χάρη της αντίφασης, ότι **το γινόμενό τους είναι περιττός** (**ισχύει το p**), αλλά ότι **κάποιος από τους m και n** (ίσως και οι δύο) ***δεν* είναι περιττός** (**δεν ισχύει το q**)

- Έστω ότι ο **n δεν είναι περιττός**

- Άρα θα έχει τη μορφή **n = 2l** για κάποιο αριθμό **l**

Λύση 2 (2/2)

- Αν τώρα πάρουμε το γινόμενο τους, θα έχουμε

$$\mathbf{mn = (2k + 1)(2l) = 2(2kl + l)}$$

- Από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το **mn δεν είναι περιττός** εφόσον μπορεί να γραφεί στην μορφή **2t**, όπου **t = 2kl + l**
- **Αυτό όμως αντιτίθεται στην υπόθεση ότι το γινόμενό τους είναι περιττός**
- Ο λόγος που πέσαμε σε αντίφαση είναι γιατί υποθέσαμε ότι κάποιος από τους δύο δεν είναι περιττός
- **Άρα και οι δύο πρέπει να είναι περιττοί, οπότε αποδείξαμε το ζητούμενο**

Άμεση Απόδειξη

- Ας δούμε τώρα μερικούς ακόμα τρόπους απόδειξης ισχυρισμών της μορφής **p→q**

- Σε μία **άμεση** απόδειξη *υποθέτουμε* ότι το p είναι αληθές και δείχνουμε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση, ότι και το q είναι αληθές

Παράδειγμα 3

* Έστω δύο ακέραιοι m,n. Ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τρόπο, ότι

“*αν* οι **m και n είναι περιττοί**, *τότε* και το γινόμενό τους **mn είναι περιττός**"

Λύση 3

- Σε αυτήν την περίπτωση p =“**οι m και n είναι περιττοί**" και q =“**το γινόμενο mn είναι περιττός**”
- Ας υποθέσουμε ότι και **δύο είναι περιττοί** (**ισχύει το p**)
- Άρα υπάρχουν **ακέραιοι k, l** ώστε να ισχύει **m = 2k+1** και **n = 2l+1**
- Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος **t** ώστε **mn = 2t + 1**
- Ας υπολογίσουμε λοιπόν το **mn:**

$$mn = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1 = 2t + 1$$

όπου θέσαμε $t = 2kl + k + 1$

- Άρα και το q είναι αληθές, οπότε και ο ισχυρισμός είναι αληθής

Έμμεση Απόδειξη

- Ένας τρίτος τρόπος είναι η έμμεση απόδειξη που χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το $p \to q$ είναι λογικά ισοδύναμο με το $\neg p \to \neg q$

- Ο δεύτερος ισχυρισμός λέγεται **αντιθετοαντίστροφος** του πρώτου.

Παράδειγμα 4

- * “Αν οδηγώ, δεν πίνω" είναι ισοδύναμο με το “Αν πίνω, δεν οδηγώ”

Η ισοδυναμία προκύπτει ως εξής:

$$
\begin{array}{llll}
p \rightarrow q & \Leftrightarrow & \neg p \vee q & \text{Ορισμός } \rightarrow \\
& \Leftrightarrow & q \vee \neg p & \text{Αντιμεταθετικότητα} \\
& \Leftrightarrow & \neg(\neg q) \vee \neg p & \text{Διπλή χρήση της άρνησης } \neg \\
& \Leftrightarrow & \neg q \rightarrow \neg p & \text{Ορισμός } \rightarrow
\end{array}
$$

- Η ισοδυναμία μπορεί επίσης να αποδειχτεί συγκρίνοντας τους πίνακες αληθείας των δύο ισχυρισμών
- Μία ”απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή" ότι το p $\rightarrow$ q είναι αληθές υποθέτει ότι ¬q είναι αληθές και αποδεικνύει ότι το ¬p είναι αληθές
- Είναι ουσιαστικά μία άμεση απόδειξη του λογικά ισοδύναμου αντιθετοαντίστροφου ισχυρισμού

Ένα Παράδοξο

- Ο κ. Παπαδόπουλος είναι ο μόνος κουρέας στην πόλη
- Ξυρίζει όλους τους άνδρες και μόνο αυτούς που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.
- Ο κ. Παπαδόπουλος ξυρίζεται μόνος του;

Το Παράδοξο του Russel

1. Αν ξυρίζεται μόνος του τότε...

- **Από την υπόθεση που γίνεται δεν μπορεί να ξυρίζει τον εαυτό του!**

2. Αν δεν ξυρίζεται μόνος του τότε...

- **Από την υπόθεση που γίνεται πρέπει να ξυρίζει τον εαυτό του!!**

Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.

- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064

- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369

- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Intoduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003

- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Αλέξανδρος Τζάλλας. Θεωρία Υπολογισμού.
Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.teiep.gr/courses/COMP112/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Τέλος Ενότητας

Λογικά Επιχειρήματα,
Αλφάβητα & Γλώσσες (1/2)

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης