Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Πληροφορική Ι

Ενότητα 3 : **Αναπαράσταση αριθμών στο δυαδικό σύστημα**

Δρ. Γκόγκος Χρήστος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Ελεγκτικής (Παράρτημα Πρέβεζας)

Πληροφορική Ι

Ενότητα 3 : Αναπαράσταση αριθμών στο δυαδικό σύστημα

Δρ. Γκόγκος Χρήστος
Επίκουρος Καθηγητής

Άρτα, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

- Ελληνικό - Ρωμαϊκό Σύστημα αρίθμησης
  - Πολύπλοκο – δύσχρηστο
  - CCCLXIX = 369
- Αραβικό σύστημα αρίθμησης
  - Η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται από την θέση του κατά την γραφή του αριθμού
  - Ψηφία που βρίσκονται αριστερότερα είναι περισσότερο σημαντικά από ψηφία που βρίσκονται δεξιότερα
- Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
  - Έχει δέκα ψηφία {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
  - Βάση είναι το 10
  - Η θέση ενός ψηφίου προσδιορίζει την αξία του
  - Η πρώτη θέση από δεξιά αντιστοιχεί στο 10^0 η δεύτερη στο 10^1 η τρίτη στο 10^2 η τέταρτη στο 10^3 κ.ο.κ.
- $1243= 1*10^3+2*10^2+4*10^1+3*10^0$

Δυαδικό σύστημα αρίθμησης

- Δυαδικό σύστημα
  - Έχει 2 ψηφία {0,1}
  - Βάση είναι το 2.
  - Η θέση ενός ψηφίου προσδιορίζει την αξία του.
  - Η πρώτη θέση από δεξιά αντιστοιχεί στο 2^0 η δεύτερη στο 2^1 η τρίτη στο 2^2 κοκ.

Υπάρχουν άπειρα συστήματα αρίθμησης

Για παράδειγμα το πενταδικό με βάση το 5 και ψηφία τα {0,1,2,3,4}

Ο αριθμός 312 στο πενταδικό είναι ο αριθμός του δεκαδικού συστήματος $3*5^2 + 1*5^1 + 2*5^0 = 75 + 5 + 2 = 82$

11110011=1*128+1*64+1*32+1*16+0*8+0*4+1*2+1*1=243

Μετατροπή από δυαδικό σε δεκαδικό

Ο εκθέτης κάθε ψηφίου προσδιορίζεται από την θέση του η οποία είναι 0 για το πλέον δεξιά ψηφίο και αυξάνεται κατά 1 για κάθε ψηφίο προς τα δεξιά.

$$\overset{5}{1}\overset{4}{0}\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1} = 1*2^0 + 0*2^1 + 1*2^2 + 1*2^3 + 0*2^4 + 1*2^5 =$$

$$1+0+4+8+0+32 = 45$$

$$\overset{32}{1}\,\overset{16}{0}\,\overset{8}{1}\,\overset{4}{1}\,\overset{2}{0}\,\overset{1}{1} = 1+0+4+8+0+32 = 45$$

εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού

Μετατροπή από δεκαδικό σε δυαδικό

- Η διαδικασία της μετατροπής γίνεται με συνεχείς ακέραιες διαιρέσεις με το δύο.
- Το υπόλοιπα της διαίρεσης με το 2 κρατούνται με την σειρά που δημιουργούνται για μελλοντική αναφορά.
- Ο δεκαδικός αριθμός αντικαθίσταται με το πηλίκο της διαίρεσής του με το 2 μέχρι το πηλίκο να γίνει μηδέν.
- Τα υπόλοιπα της διαίρεσης διαβάζονται από το τελευταίο προς το πρώτο δίνοντας τον ισοδύναμο δυαδικό αριθμό.

47 ÷ 2 = 23 και υπόλοιπο 1

23 ÷ 2 = 11 και υπόλοιπο 1

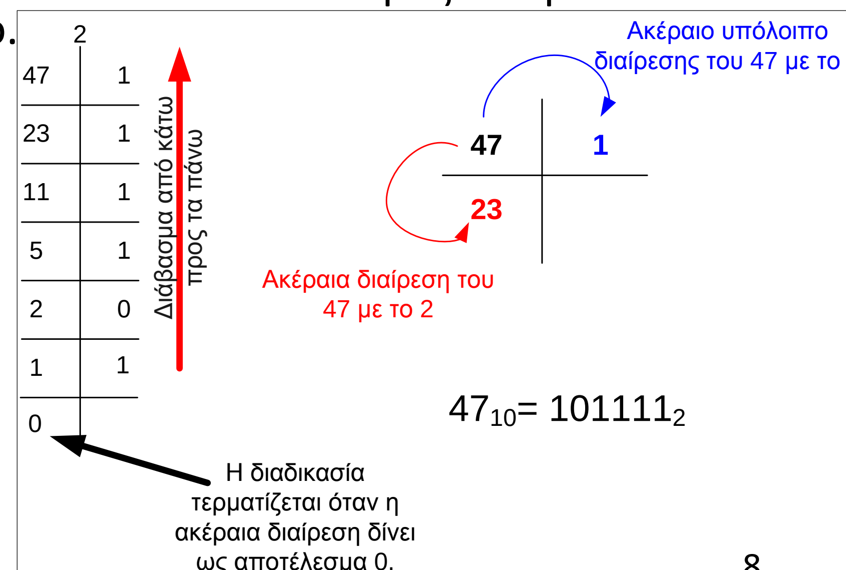
11 ÷ 2 = 5 και υπόλοιπο 1

5 ÷ 2 = 2 και υπόλοιπο 1

2 ÷ 2 = 1 και υπόλοιπο 0

1 ÷ 2 = 0 και υπόλοιπο 1

$47_{(10)} \rightarrow 101111_{(2)}$



Πλέον σημαντικό ψηφίο (MSB=Most Significant Bit)

- Το πλέον σημαντικό ψηφίο ενός δυαδικού αριθμού (MSB=Most Significant Bit) είναι αυτό που βρίσκεται στην αριστερότερη θέση διότι η βαρύτητα με την οποία συμμετέχει στην αριθμητική τιμή του αριθμού είναι η μεγαλύτερη.
- Το λιγότερο σημαντικό ψηφίο ενός δυαδικού αριθμού (LSB=Least Significant Bit) είναι το δυαδικό ψηφίο το οποίο βρίσκεται στην δεξιότερη θέση.

10101111

MSB

LSB

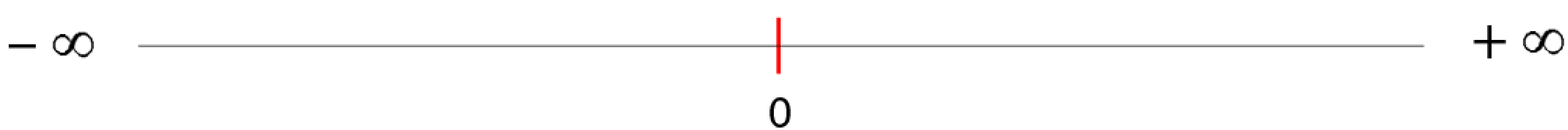
Ολίσθηση αριστερή και δεξιά (shift left, shift right)

- Προσθέτοντας ένα μηδενικό δεξιότερα από το λιγότερο σημαντικό ψηφίο (LSB) ο δυαδικός αριθμός πολλαπλασιάζεται επί δύο. Η πράξη αυτή λέγεται αριστερή ολίσθηση
- Διαγράφοντας το λιγότερο σημαντικό ψηφίο (LSB) ενός δυαδικού αριθμού ο αριθμός υποδιπλασιάζεται στον κοντινότερο ακέραιο.

```
 11011 = 27
110110 = 27 * 2 = 54 (shift left)
  1101 = 27 div 2 = 13 (shift right)
```

Αναπαράσταση ακεραίων

- Οι ακέραιοι είναι ολόκληροι αριθμοί δηλαδή αριθμοί χωρίς κλασματικό μέρος (π.χ. ο 134 είναι ακέραιος ενώ ο 134,23 όχι).
- Ένας ακέραιος μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός.
- Δεν υπάρχει Η/Υ που να μπορεί να αποθηκεύσει όλους τους ακεραίους από το - ∞ έως το + ∞ λόγω της πεπερασμένης μνήμης του.
- Η δέσμευση bit είναι το πλήθος των bits που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός ακεραίου
- Υπάρχουν δύο κατηγορίες αναπαράστασης ακεραίων
  - Οι μη προσημασμένοι ακέραιοι.
  - Οι προσημασμένοι ακέραιοι.



Μη προσημασμένοι ακέραιοι αριθμοί (unsigned integer numbers)

- Ο μέγιστος μη προσημασμένος ακέραιος εξαρτάται από τον αριθμό των bits (συνήθως 8 ή 16) που χρησιμοποιεί ο υπολογιστής για την αναπαράσταση μη προσημασμένων ακεραίων.

- Η αναπαράσταση των μη προσημασμένων μπορεί να χρησιμοποιείται όταν γίνεται χρήση ακεραίων χωρίς να απαιτούνται αρνητικοί αριθμοί.

- Δέσμευση 8bits ➔ 2^8 =256 [0 έως 255]
- Δέσμευση 16bits ➔ 2^{16} =65536 [0 έως 65535]

Υπερχείλιση (Overflow)

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 bits	Δέσμευση 16 bits
7	00000111	0000000000000111
234	11101010	0000000011101010
258	Υπερχείλιση	0000000100000010
24.760	Υπερχείλιση	0110000010111000
1.245.678	Υπερχείλιση	Υπερχείλιση

Παραδείγματα με μή προσημασμένους ακέραιους αριθμούς

- Αποθηκεύστε τον αριθμό 7 σε μια θέση μνήμης 8 bit
  - Αρχικά μετατρέπεται ο αριθμός 7 στο δυαδικό σύστημα (111)
  - Προσθέτουμε αριστερά 5 μηδενικά έτσι ώστε να έχουμε ένα σύνολο από 8 bits (00000111)
  - Ο αριθμός αποθηκεύεται στην θέση μνήμης
- Ερμηνεύστε τον αριθμό 00101011 στο δεκαδικό σύστημα θεωρώντας ότι έχει αποθηκευτεί ως μη προσημασμένος ακέραιος με δέσμευση μνήμης 8bits
  - Ακολουθώντας την διαδικασία μετατροπής δυαδικού σε δεκαδικό αριθμό το αποτέλεσμα είναι 43

Χρήσεις μη προσημασμένων ακεραίων

- Καταμέτρηση
- Διευθυνσιοδότηση. Οι διευθύνσεις της θέσης μνήμης είναι όλες θετικές ξεκινώντας από το μηδέν. Πολλές φορές η εσωτερική λειτουργία των προγραμμάτων επιβάλει την αποθήκευση διευθύνσεων σε θέσεις μνήμης
- Γενικά, περιπτώσεις που η αποθηκευμένη ποσότητα δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές

Προσημασμένοι ακέραιοι

- Χρειάζεται ένα bit για την αναπαράσταση του πρόσημου
- 0 σημαίνει θετικός αριθμός, 1 σημαίνει αρνητικός αριθμός
- Από τα N ψηφία που δεσμεύονται για την αναπαράσταση του αριθμού τα N-1 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποθήκευση της απόλυτης τιμής του

Συμπλήρωμα ως προς 2

- Το συμπλήρωμα ως προς δύο αποτελεί τον πιο συνηθισμένο, τον πιο σημαντικό και τον πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο τρόπο αναπαράστασης ακεραίων
- Στην παράσταση συμπληρώματος ως προς δύο, το τελευταίο αριστερά bit καθορίζει το πρόσημο του αριθμού. Αν είναι 0, ο αριθμός είναι θετικός ενώ αν είναι 1 ο αριθμός είναι αρνητικός.
- Η αποθήκευση αριθμών συμπληρώματος ως προς δύο γίνεται ως εξής:
  – Ο αριθμός μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα αγνοώντας το πρόσημο.
  – Αν το πλήθος των bits είναι μικρότερο από N προστίθενται μηδενικά στα αριστερά του αριθμού έτσι ώστε να υπάρχει ένα σύνολο από N bits.
  – Αν το πρόσημο είναι θετικό δεν χρειάζεται καμία άλλη ενέργεια. Αν το πρόσημο είναι αρνητικό μένουν ως έχουν όλα τα δεξιότερα 0 και το πρώτο 1. Τα υπόλοιπα bits αντικαθίστανται από το συμπλήρωμα τους.

Παραδείγματα με προσημασμένους ακεραίους

- Παράδειγμα: Αποθηκεύστε τον αριθμό 15 σε μια θέση μνήμης 8 bits με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2
- 15 ➔ 1111 ➔ 00001111

- Παράδειγμα: Αποθηκεύστε τον αριθμό -12 σε μια θέση μνήμης με δέσμευση 8 bits χρησιμοποιώντας αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2
- 12 ➔ 1100 ➔ 00001100 ➔ 11110100

Η παράσταση με μορφή συμπληρώματος ως προς 2 διευκολύνει τις αριθμητικές πράξεις

Προσημασμένοι ακέραιοι αριθμοί

- Το διάστημα τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει ένα προσημασμένος ακέραιος αριθμός συμπληρώματος ως προς δύο με Ν δυαδικά ψηφία να δεσμεύονται για κάθε αριθμό είναι
  $\{-2^{N-1} \ldots +2^{N-1}-1\}$
- Το συμπλήρωμα ως προς δύο επιτυγχάνεται ως εξής: Ξεκινώντας από δεξιά και κινούμενοι προς τα αριστερά διατηρούμε όλα τα ψηφία ίδια μέχρι να συναντήσουμε το πρώτο 1. Τα υπόλοιπα ψηφία (μετά το 1) αντιστρέφονται.
  - 0000000**1** → 1111111**1**
  - 001010**10** → 110101**10**
  - 10**100000** → 01**100000**

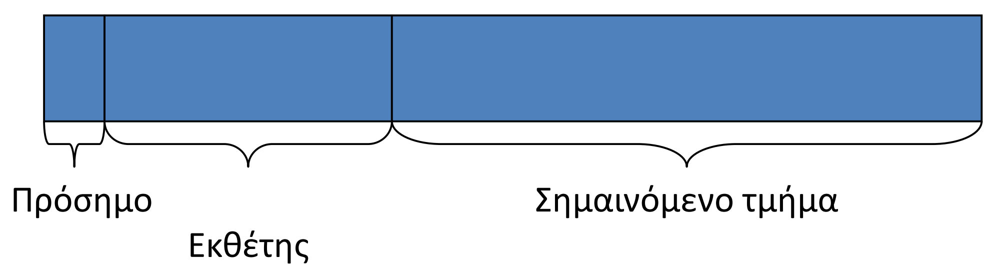
<u>Παράδειγμα</u>: Ερμηνεύστε τον αριθμό 11110100 στο δεκαδικό σύστημα δεδομένου ότι έχει αποθηκευτεί ως ακέραιος συμπληρώματος ως προς 2

11110100 → συμπλήρωμα ως προς 2 → 00001100 → $-12_{(10)}$

Αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής (floating point)

- Αναπαράσταση απλής ακρίβειας (7 δεκαδικά ψηφία)
- Αναπαράσταση διπλής ακρίβειας (14 δυαδικά ψηφία)
- Η αναπαράσταση χωρίζεται σε 3 τμήματα
  - Πρόσημο (+/-)
  - Εκθέτης (e)
  - Σημαινόμενο τμήμα (m)

$(+/-)\ 1{,}m * 2^{e}$



Η αναπαράσταση απλής ακρίβειας συνήθως καταλαμβάνει 2 bytes μνήμης

Επιστημονική αναπαράσταση αριθμών (Scientific Notation)

- Επιτρέπει τον εύκολο χειρισμό πολύ μικρών και πολύ μεγάλων αριθμών
- Βασίζεται σε δυνάμεις του 10

Πληθυσμός της Γης (Οκτ-2010)
$6878330501=6{,}878330501 \times 10^{9}=6{,}88E+09$

- Εντοπισμός της υποδιαστολής και μετακίνησή της είτε δεξιά είτε αριστερά έτσι ώστε ο αριθμός να γίνει μεγαλύτερος του 1 και μικρότερος του 10
- Καταμέτρηση του αριθμού των θέσεων που η υποδιαστολή μετακινήθηκε
- Αν μετακινηθεί προς τα αριστερά ο εκθέτης είναι θετικός αριθμός ενώ αν μετακινηθεί προς τα δεξιά ο εκθέτης είναι αρνητικός αριθμός
  - π.χ. ο αριθμός 945678345,0 γίνεται 9,45678345E+08 και σε προσέγγιση 9,5E+08 ($\sim 9{,}5 \times 10^{8}$)
  - π.χ. ο αριθμός 0,0000000123 γίνεται 1,23E-08 ($1{,}23 \times 10^{-8}$)

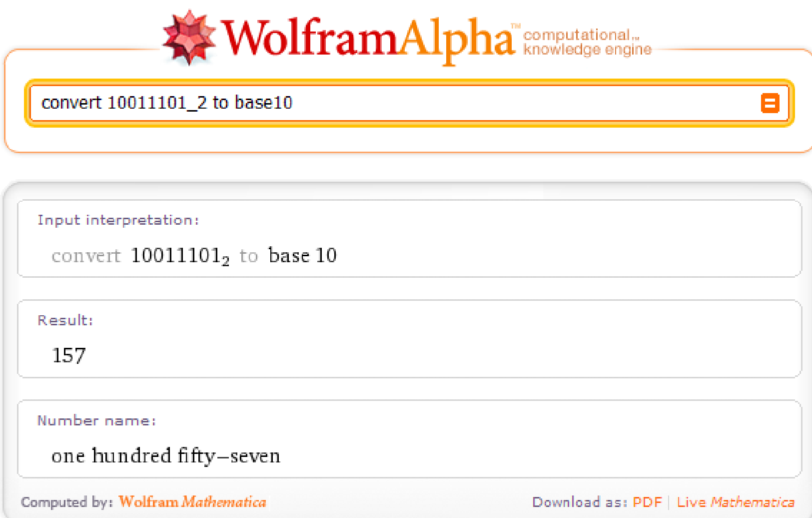
Γιατί οι αριθμοί δεν αποθηκεύονται ως χαρακτήρες;

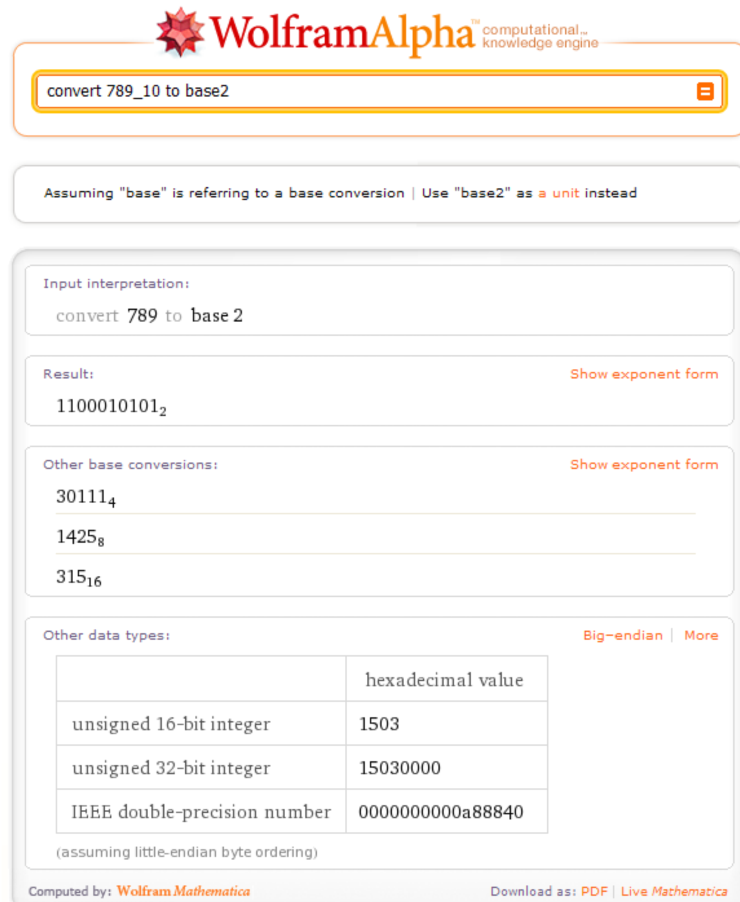
- **Μειονεκτήματα**
  - Το μέγεθος που καταλαμβάνει ένας αριθμός αν αποθηκευθεί ως μια σειρά χαρακτήρων είναι μεγάλο (ιδιαίτερα αν έχει πολλά δεκαδικά ψηφία)
  - Οι πράξεις με αριθμούς γίνονται δύσκολες στην υλοποίησή τους όταν τα ψηφία αναπαρίστανται ως χαρακτήρες

Ο αριθμός 12345 ως ASCII είναι τα σύμβολα '1', '2', '3', '4' και '5' και καταλαμβάνει 5 bytes

'1'+ '2' = ?

http://www.wolframalpha.com/





Βιβλιογραφία

1. Forouzan B., Mosharaf F. Εισαγωγή στην επιστήμη των υπολογιστών. Εκδόσεις Κλειδάριθμος (2010)
2. Καρολίδης Δ., Ξαρχάκος Κ.. Εισαγωγή στην πληροφορική και στο διαδίκτυο. Εκδόσεις Άβακας (2008).
3. Σφακιανάκης Μ. Εισαγωγή στην πληροφορική σκέψη. Εκδόσεις Κλειδάριθμος (2003).
4. Τσιτμηδέλης Σ., Τικτοπούλου Ε. Εισαγωγή στην πληροφορική. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Αράκυνθος (2009).
5. Γιαγλής Γ. Εισαγωγή στην πληροφορική. Γκιούρδας εκδοτική (2009).
6. Αβούρης Ν., Κουφοπαύλου Ο., Σερπάνος Δ. Εισαγωγή στους υπολογιστές. Εκδόσεις typorama (2004).
7. Biermann A. Σπουδαίες ιδέες στην επιστήμη των υπολογιστών. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (2008).
8. Brookshear J.G. Η επιστήμη των υπολογιστών, μια ολοκληρωμένη παρουσίαση. Εκδόσεις Κλειδάριθμος (2009).
9. Ceruzzi P.E. Ιστορία της υπολογιστικής τεχνολογίας. Από τον ENIAC μέχρι το διαδίκτυο. Εκδόσεις Κάτοπτρο (2006).

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Δρ. Γκόγκος Χρήστος. Πληροφορική Ι.
Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.teiep.gr/OpenClass/courses/ACC136/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης

Άρτα, 2015

Τέλος Ενότητας

Αναπαράσταση αριθμών στο δυαδικό σύστημα

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ