



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 8 : Αυτόματα NFA - DFA

Αλέξανδρος Τζάλλας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 8 : Αυτόματα NFA - DFA

Αλέξανδρος Τζάλλας

Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015





Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Κλειστότητα

Ορισμός:

Ένα σύνολο είναι κλειστό κάτω από μια πράξη, εάν η πράξη αυτή, όταν εκτελείται σε μέλη του συνόλου, επιστρέφει ένα αντικείμενο που ανήκει επίσης στο σύνολο.

- π.χ.
 - Το σύνολο των φυσικών είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό
 - Το σύνολο των φυσικών δεν είναι κλειστό ως προς την Διαίρεση
- Η συλλογή των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς τις κανονικές πράξεις



Κλειστότητα ως προς την ένωση

ΘΕΩΡΗΜΑ

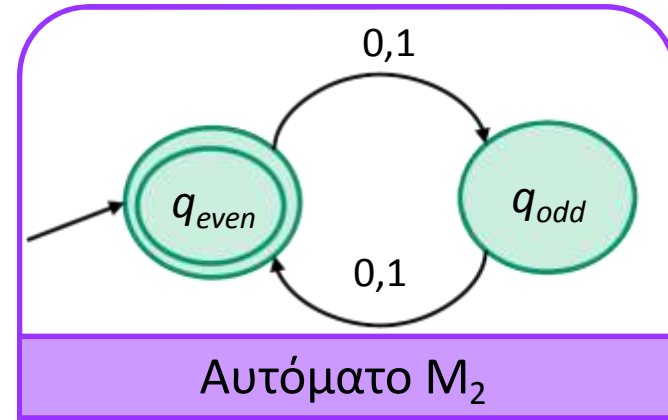
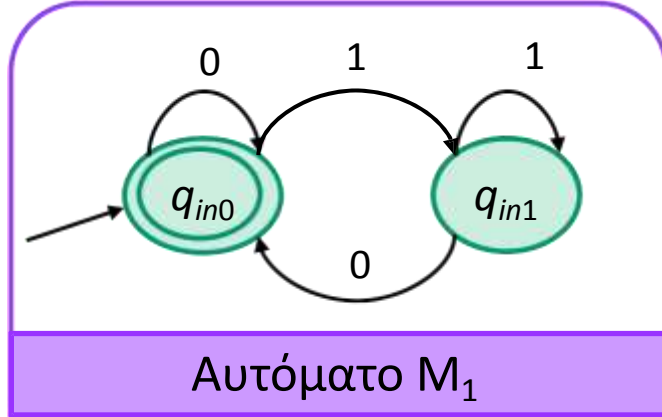
Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση

- Δηλαδή: Αν οι γλώσσες A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε το ίδιο ισχύει για τη γλώσσα $A_1 \cup A_2$
- **Βασική Ιδέα:** Αφού οι A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε υπάρχουν αυτόματα M_1 και M_2 που τις αναγνωρίζουν. Συνδυάζουμε τα M_1 και M_2 για να κτίσουμε αυτόματο M που να αναγνωρίζει τη γλώσσα $A_1 \cup A_2$.
- Με κάθε σύμβολο που διαβάζουμε πρέπει να γνωρίζουμε σε ποια κατάσταση βρισκόμαστε σε κάθε ένα από τα επιμέρους αυτόματα.
 - Συνεπώς: πρέπει να θυμόμαστε ζεύγη
 - Αν το M_1 έχει k_1 καταστάσεις και το M_2 έχει k_2 καταστάσεις, το M πρέπει να έχει $k_1 \cdot k_2$ καταστάσεις.



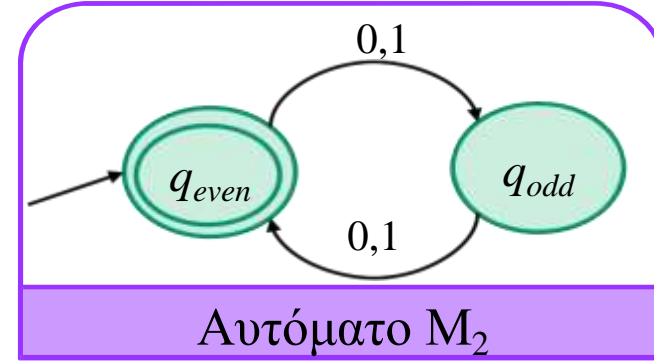
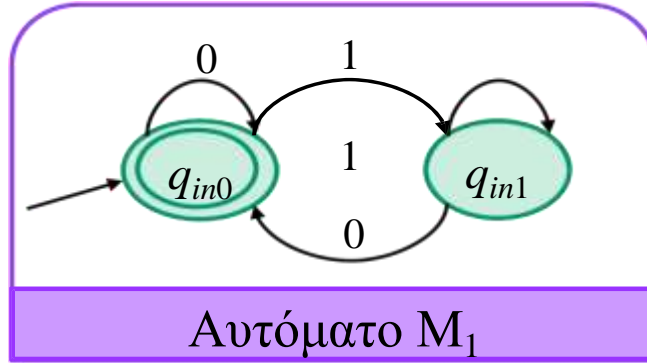
Παράδειγμα (1/2)

- Έστω οι γλώσσες
 - $A_1 = \{w : \text{η λέξη } w \text{ τελειώνει σε } 0 \text{ ή έχει μήκος } 0\}$
 - $A_2 = \{w : \text{η λέξη } w \text{ έχει άρτιο μήκος}\}$
 - $A_1 \cap A_2$: όλες οι λέξεις που είτε έχουν άρτιο μήκος είτε τελειώνουν σε 0





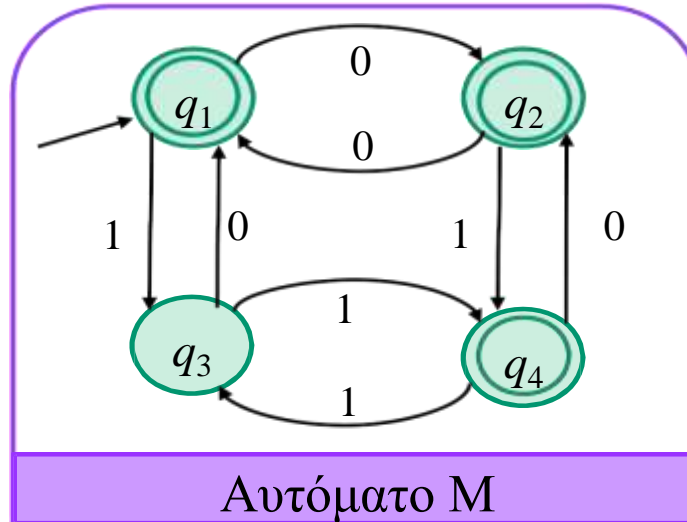
Παράδειγμα (2/2)



Λέξεις που
τελειώνουν σε 0 και
έχουν άρτιο μήκος



Λέξεις που
τελειώνουν σε 1 και
έχουν περιττό μήκος



Λέξεις που
τελειώνουν σε 0 και
έχουν περιττό
μήκος

Λέξεις που
τελειώνουν σε 1 και
έχουν άρτιο
μήκος



Απόδειξη κλειστότητας ως προς την ένωση

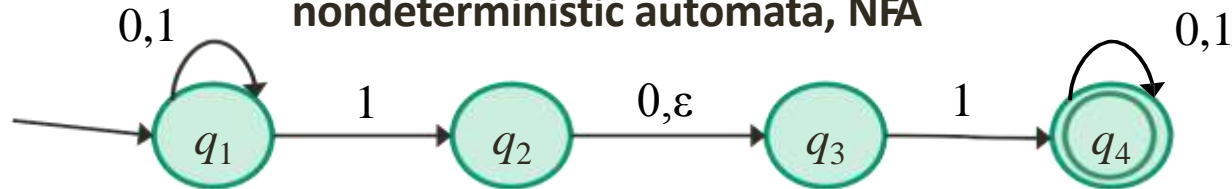
- Κατασκευαστική
- Έστω $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.
- Κατασκευάζουμε το $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:
 - $Q = \{(r_1, r_2) : r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
 - Σ : το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των M_1 και M_2
 - Για κάθε $(r_1, r_2) \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε
$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$
 - $q_0 = (q_1, q_2)$
 - $F = \{(r_1, r_2) \in Q : r_1 \in F_1 \text{ ή } r_2 \in F_2\}$



Ανταιτιοκρατία

- **Αιτιοκρατία:** από κάθε κατάσταση, για κάθε σύμβολο η επόμενη κατάσταση είναι καθορισμένη.
- **Ανταιτιοκρατία:** γενίκευση της αιτιοκρατίας
 - Ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες από μια επιλογές για την επόμενη κατάσταση

**Ανταιτιοκρατικά αυτόματα, μη ντετερμινιστικά αυτόματα,
nondeterministic automata, NFA**

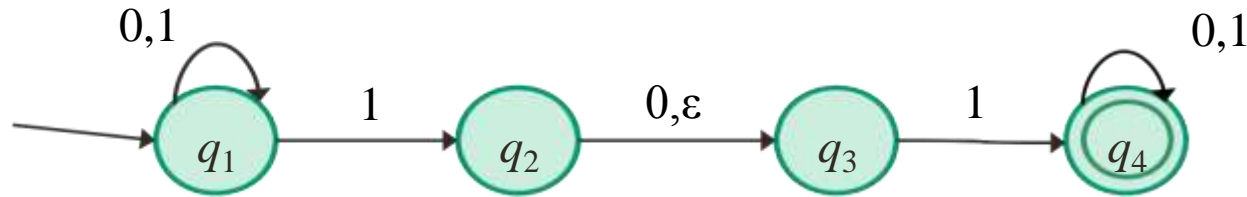


- Διαφορές από DFA
 - Από κάθε κατάσταση μπορούν να εκκινούν μηδέν, ένα, ή περισσότερα βέλη για κάθε σύμβολο του αλφαβήτου
 - Προσθέτει το σύμβολο ϵ στο αλφάβητο

Σε ένα αιτιοκρατικό αυτόματο οι επιγραφές στα βέλη μετάβασης είναι σύμβολα του αλφαβήτου... Το αυτόματο παραβιάζει αυτό το κανόνα



Πως υπολογίζει ένα NFA;



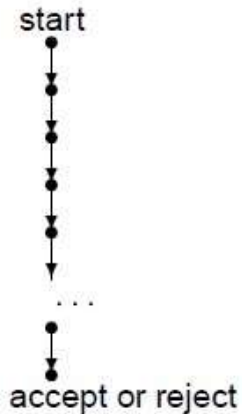
- Έστω βρισκόμαστε στην q_1 και λαμβάνουμε 1
 - Το αυτόματο διασπάται σε πολλαπλά αντίγραφα του εαυτού του και ακολουθεί όλες τις δυνατότητες παράλληλα
 - Αν κάποιο αντίγραφο το επόμενο σύμβολο εισόδου δεν εμφανίζεται σε κανένα από τα βέλη τότε το αντίγραφο «σβήνει»
 - Το αυτόματο τερματίζει αν στο τέλος της ανάγνωσης της εισόδου υπάρχει έστω και ένα αντίγραφο που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής
- Τι γίνεται όταν σε κάποια κατάσταση ξεκινά μονοπάτι με το σύμβολο ϵ ;
 - Χωρίς να διαβάσει κανένα σύμβολο της λέξης εισόδου, το αυτόματο διασπάται σε αντίγραφα, το ένα παραμένει στην τρέχουσα κατάσταση και τα υπόλοιπα ακολουθούν τα εξερχόμενα βέλη με επιγραφή « ϵ ».



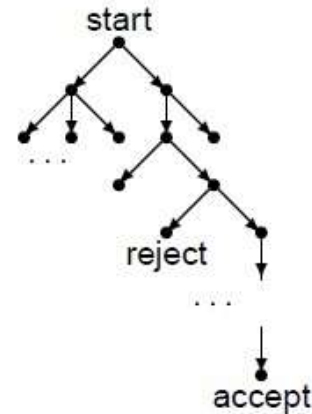
Δέντρο Υπολογισμού

- Ένα NFA μπορεί να τύχει ερμηνείας ως ένα **δένδρο δυνατοτήτων**:
 - Η ρίζα του δέντρου αντιστοιχεί στην αρχή του υπολογισμού
 - Κάθε σημείο διακλάδωσης αντιστοιχεί σε ένα σημείο του υπολογισμού στο οποίο το αυτόματο έχει πολλαπλές επιλογές
 - Το αυτόματο αποδέχεται αν έστω και ένα από τα μονοπάτια αυτού του δένδρου καταλήγει σε κατάσταση αποδοχής

DFA computation

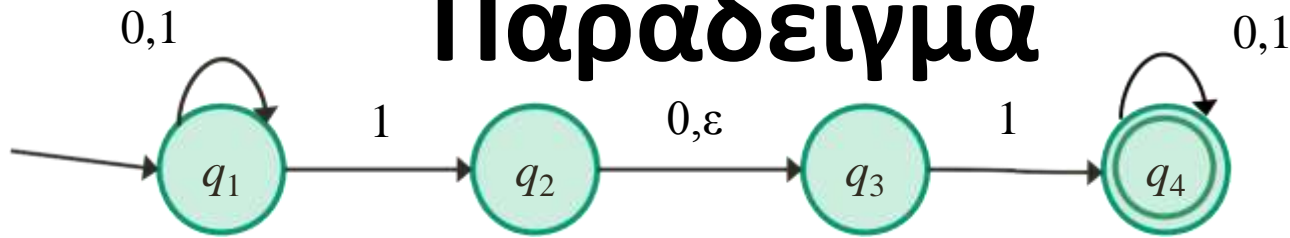


NFA computation

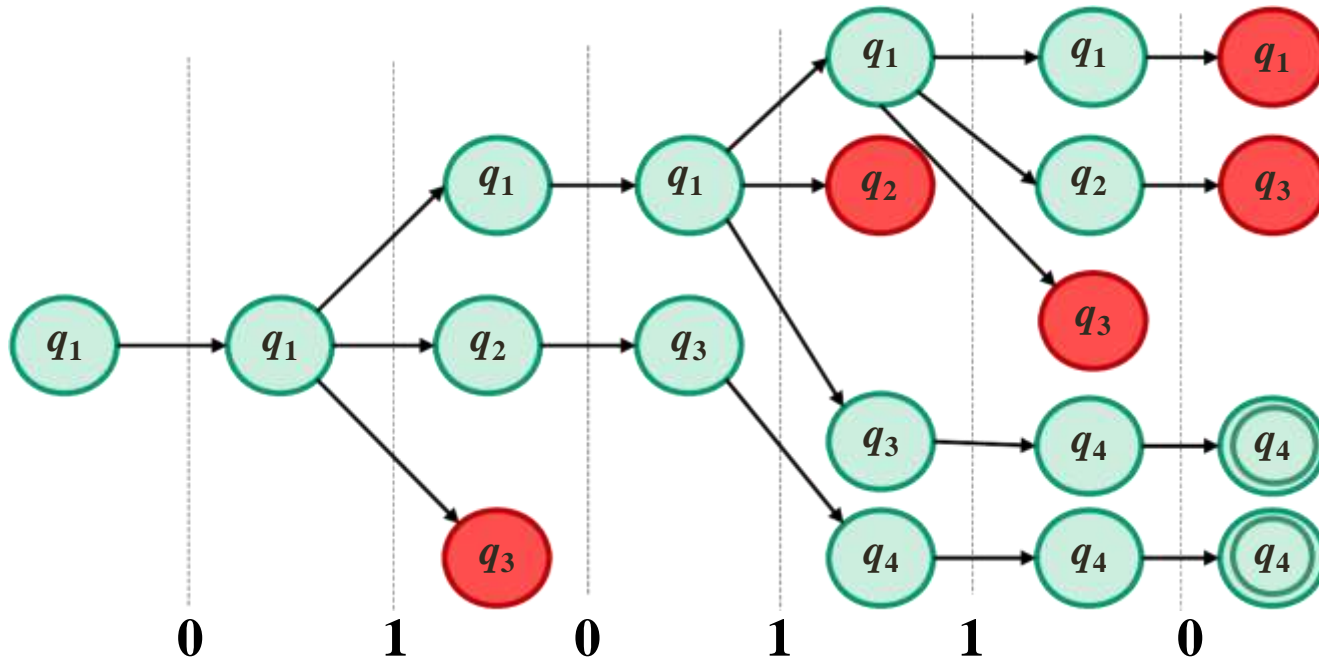




Παράδειγμα

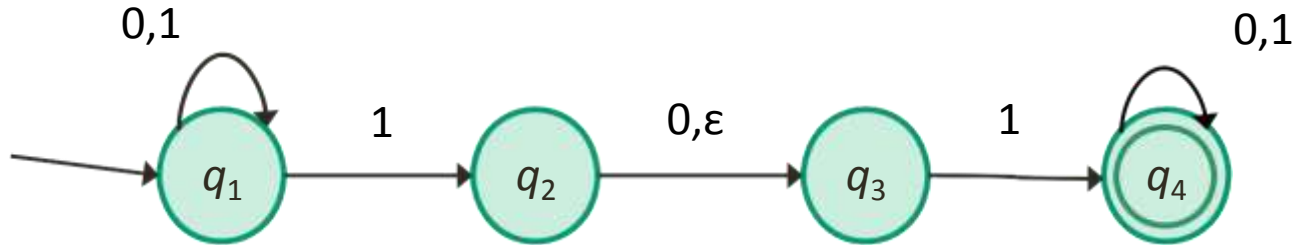


- Πως προχωρά ο υπολογισμός πάνω στη λέξη 010110





Παράδειγμα



- Ποια γλώσσα αναγνωρίζει το αυτόματο;
 - Τη γλώσσα με όλες τις λέξεις που έχουν ως υπολέξη το 101 ή το 11
- Ένα καλός τρόπος να αντιλαμβανόμαστε τον τρόπο υπολογισμού αυτού του αυτόματου είναι να θεωρήσουμε ότι παραμένει στην εναρκτήρια κατάσταση q_1 μέχρι να «μαντέψει ότι βρίσκεται τρεις θέσεις πριν από το τέλος
- Εάν εκείνη τη στιγμή το σύμβολο εισόδου είναι το 1, το αυτόματο διακλαδίζεται στην κατάσταση q_2 και χρησιμοποιεί τις q_3 και q_4 για να ελέγξει αν μάντεψε σωστά



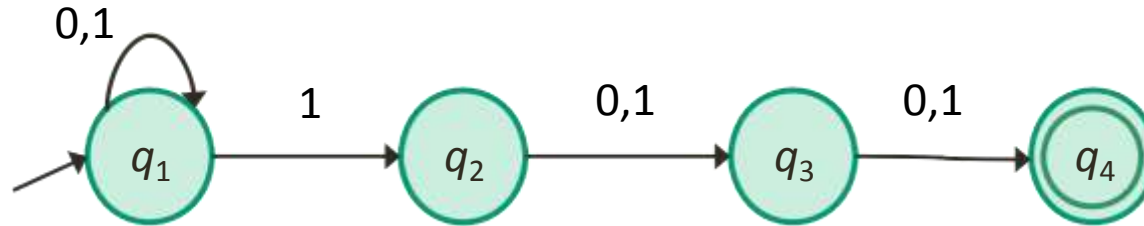
Χρησιμότητα NFA

- Κάθε NFA μπορεί να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο ισοδύναμο DFA
- Τα NFA είναι συνήθως μικρότερα
- Η λειτουργία ενός NFA είναι ευκολότερα κατανοητή
- Η κατασκευή ενός NFA είναι ευκολότερη

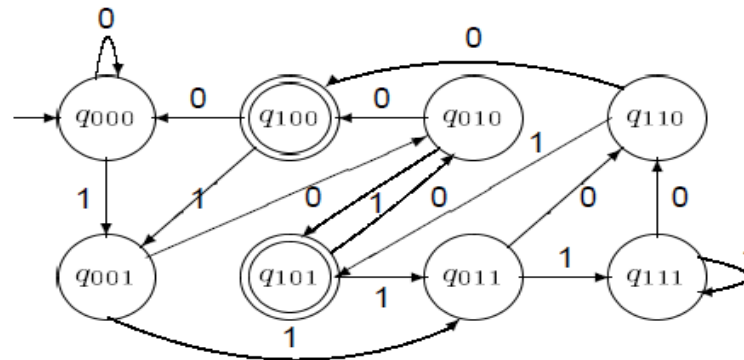


Παράδειγμα

- $A = \{w : w \text{ περιέχει το σύμβολο } 1 \text{ στην τρίτη θέση από το τέλος}\}$
 - 00100 ανήκει στην A
 - 011 δεν ανήκει

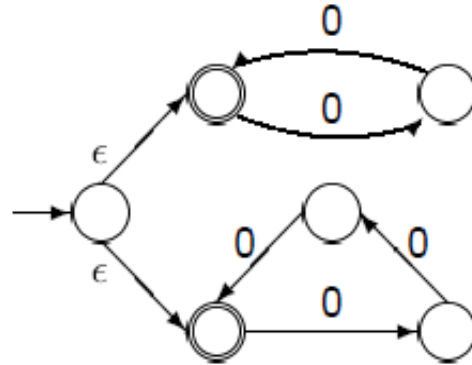


- Ποιο είναι το αντίστοιχο ντετερμινιστικό;





Χρήση «ε»-μεταβάσεων



- Το αυτόματο αποδέχεται όλες τις λέξεις 0^k όπου το k μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος ο οποίος είναι είτε πολλαπλάσιο του 2 είτε πολλαπλάσιο του 3
- Η λειτουργία του αυτόματου μπορεί να γίνει αντιληπτή ως εξής:
 1. Αρχικά η μηχανή μαντεύει εάν θα ελέγξει για κάποιο πολλαπλάσιο του 2 ή του 3 διακλαδιζόμενη αντίστοιχα προς τον άνω ή τον κάτω βρόχο
 2. Στην συνέχεια ελέγχει εάν μάντεψε σωστά

* Φυσικά θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το παραπάνω αυτόματο με κάποιο που δεν περιέχει μεταβάσεις ϵ , ή ακόμη και με κάποιο πλήρως αιτιοκρατικό (αλλά το αυτόματο αυτό είναι το απλούστερο δυνατό)



NFA – Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μη ντετερμινιστικό, πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα

$Q, \Sigma, \delta, q_0, F$, όπου

1. Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **καταστάσεις**,
2. Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται *αλφάβητο*,
3. $\delta: Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow P(Q)$, είναι η **συνάρτηση μεταβάσεων**,
4. $q_0 \in Q$ είναι η **εναρκτήρια κατάσταση** (αρχική κατάσταση),
5. $F \subseteq Q$ είναι το **σύνολο των καταστάσεων αποδοχής** (τελικές καταστάσεις).

Συμβολισμός: $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$

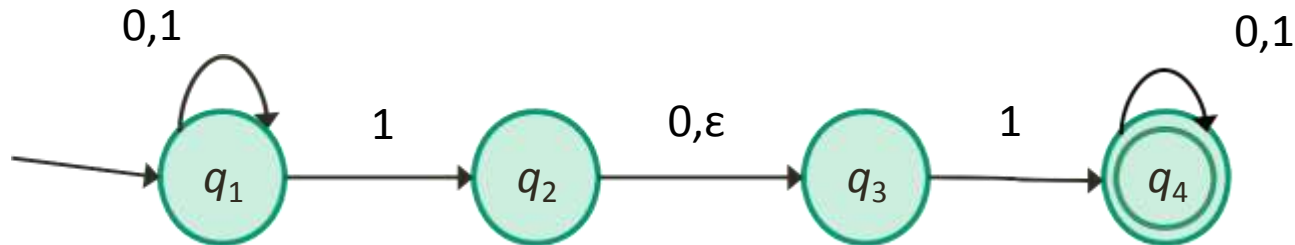
Παρατήρηση: Κάθε DFA είναι και NFA!



Παράδειγμα DFA

- $N_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, όπου
 - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
 - $\Sigma = \{0,1\}$
 - η συνάρτηση μεταβάσεων δ περιγράφεται στον πίνακα
 - εναρκτήρια κατάσταση είναι η q_1
 - και $F = \{q_4\}$

δ	0	1	ϵ
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	\emptyset
q_2	$\{q_3\}$	\emptyset	$\{q_3\}$
q_3	\emptyset	$\{q_4\}$	\emptyset
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	\emptyset





Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ αποδέχεται μια λέξη w αν αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = y_1y_2\dots y_m$ όπου $y_i \in \Sigma_\epsilon$ αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων r_0, r_1, \dots, r_m του Q που να ικανοποιεί τις συνθήκες:
 - $r_0 = q_0$
 - $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$, για $i = 0, \dots, m - 1$, και
 - $r_m \in F$
- Η συνθήκη 1 ορίζει ότι η μηχανή ξεκινά από την εναρκτήρια κατάσταση
- Η συνθήκη 2 ορίζει ότι η κατάσταση r_{i+1} είναι από τις επιτρεπτές επόμενες καταστάσεις όταν το N βρίσκεται στην κατάσταση r_i και διαβάζει το y_{i+1}
- Η συνθήκη 3 ορίζει ότι το αυτόματο καταλήγει σε κάποια από τις καταστάσεις αποδοχής.
- Το αυτόματο N αναγνωρίζει τη γλώσσα A αν: $A = \{w : \text{το } N \text{ αποδέχεται την } w\}$



Ισοδυναμία NFA με DFA

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο υπάρχει ισοδύναμο ντετερμινιστικό.

- Ιδέα απόδειξης
 - Πρέπει να δείξουμε ότι αν μια γλώσσα αναγνωρίζεται από κάποιο μη ντετερμινιστικό αυτόματο, υπάρχει ντετερμινιστικό αυτόματο που την αναγνωρίζει.
 - Κατασκευή ενός ντετερμινιστικού αυτόματου που να προσομοιώνει το μη ντετερμινιστικό
- Υπόδειξη: Κάθε σύμβολο στο NFA μας οδηγεί σε ένα σύνολο καταστάσεων
 - Αυτό το σύνολο πρέπει να αντιπροσωπεύει μια κατάσταση του ντετερμινιστικού αυτομάτου.
 - Άρα οι καταστάσεις του DFA θα περιέχουν όλα τα δυνατά υποσύνολα των καταστάσεων του NFA



NFA και Κανονικές Γλώσσες

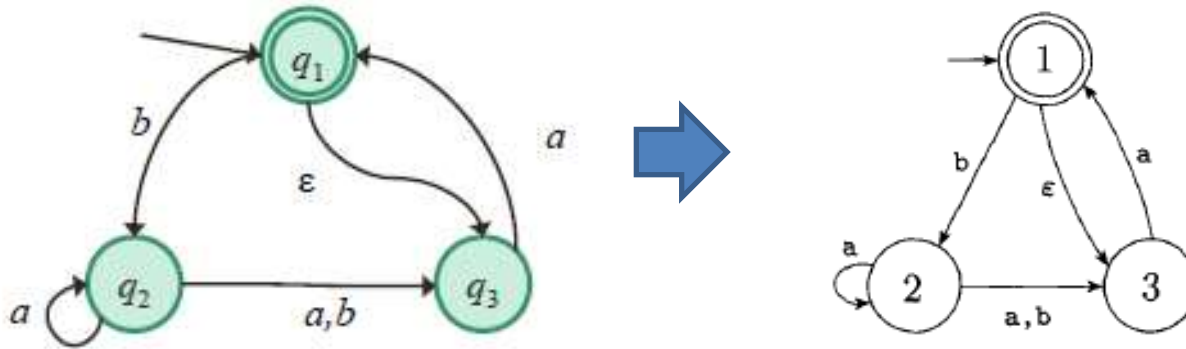
ΠΟΡΙΣΜΑ

Μια γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν υπάρχει μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει



Παράδειγμα: NFA to DFA (1/2)

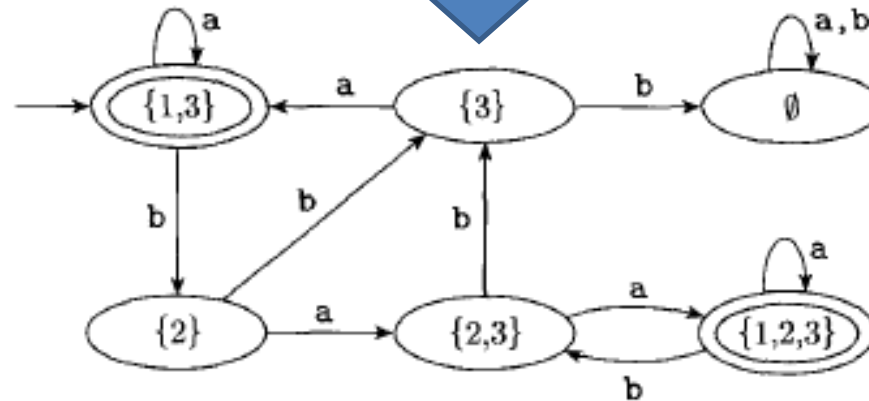
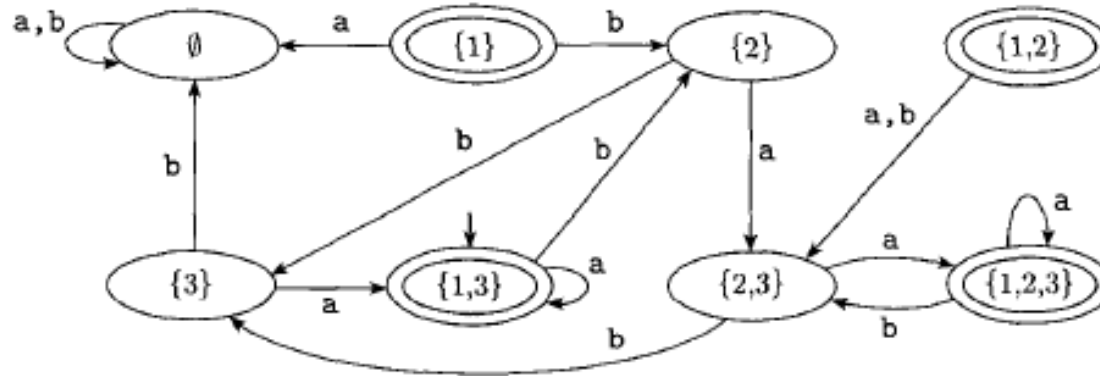
- Ποιο είναι το DFA που αντιστοιχεί στο πιο κάτω NFA;



- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
 - $Q = \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$
 - $\Sigma = \{a, b\}$
 - $q_0 = E(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\}$
 - $F = \{\{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$
 - $\delta = \dots$



Παράδειγμα: NFA to DFA (2/2)





Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.
- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064
- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369
- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003
- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Αλέξανδρος Τζάλλας.
Θεωρία Υπολογισμού.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP112/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Τέλος Ενότητας

Αυτόματα NFA - DFA



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης