



Ελληνική Δημοκρατία  
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό  
Ίδρυμα Ηπείρου

# Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 9 : Κανονικές Εκφράσεις

Αλέξανδρος Τζάλλας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

## Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 9 : Κανονικές Εκφράσεις

Αλέξανδρος Τζάλλας

Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015





# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Κανονικές Εκφράσεις

## Στοιχειώδεις Κανονικές Εκφράσεις

- Κανονικές Εκφράσεις
- Γλώσσες που περιγράφονται από Κανονικές Εκφράσεις
- Δημιουργία Κανονικών Εκφράσεων
- Παραδείγματα Κανονικών Εκφράσεων



# Στοιχειώδης Κανονικές Εκφράσεις (1/3)

- **Μία κανονική έκφραση** χρησιμοποιείται για να περιγράψει **μία κανονική γλώσσα**
- **Η κανονική έκφραση** αναπαριστά ένα "**μοντέλο**": συμβολοσειρές που ταιριάζουν σ' αυτό το μοντέλο ανήκουν στην γλώσσα, που αυτό περιγράφει, όσες δεν ταιριάζουν, δεν ανήκουν στην γλώσσα αυτή
- Οι συμβολοσειρές αναφέρονται σε κάποιο αλφάβητο  **$\Sigma$**



# Στοιχειώδης Κανονικές Εκφράσεις (2/3)

**Τονίζεται:** Τα παρακάτω αποτελούν **στοιχειώδης κανονικές εκφράσεις**:

- $x$ , για κάθε  $x \in \Sigma$ ,
- $\epsilon$ , η κενή συμβολοσειρά, και
- $\emptyset$ , παριστάνει την καμία συμβολοσειρά

Έτσι, αν  $|\Sigma| = n$ , τότε υπάρχουν  $n+2$  στοιχειώδης κανονικές εκφράσεις που ανήκουν σε ένα αλφάβητο  $\Sigma$



# Στοιχειώδης Κανονικές Εκφράσεις (3/3)

- Γλώσσες, που ορίζονται από τις στοιχειώδεις κανονικές εκφράσεις:
- Για κάθε  $x \in \Sigma$ , η στοιχειώδης κανονική έκφραση  $x$  περιγράφει την γλώσσα  $\{x\}$  (Δηλαδή την γλώσσα που έχει μια μοναδική συμβολοσειρά " $x$ ", που περιέχει ένα μοναδικό σύμβολο, το " $x$ ")
  - Η στοιχειώδης κανονική έκφραση  $\epsilon$  περιγράφει την γλώσσα  $\{\epsilon\}$  (Η μοναδική συμβολοσειρά που υπάρχει στη γλώσσα αυτή είναι η κενή συμβολοσειρά)
  - Η στοιχειώδης κανονική έκφραση  $\emptyset$  περιγράφει την γλώσσα  $\{\}$  (Κενή γλώσσα, δεν υπάρχουν συμβολοσειρές στην γλώσσα αυτή)





# Κανονικές Εκφράσεις (1/3)

- Κάθε στοιχειώδης κανονική έκφραση είναι μία κανονική έκφραση
- **Τονίζεται:** Χρησιμοποιώντας τους παρακάτω κανόνες, πεπερασμένου αριθμού φορές, μπορούμε να συνθέσουμε **νέες κανονικές εκφράσεις**:
  - Αν το  $r$  είναι μία κανονική έκφραση, τότε είναι και η  $(r)$
  - Αν το  $r$  είναι μία κανονική έκφραση, τότε είναι και η  $r^*$
  - Αν τα  $r_1$  και  $r_2$  είναι κανονικές εκφράσεις, τότε είναι και η  $r_1r_2$
  - Αν τα  $r_1$  και  $r_2$  είναι κανονικές εκφράσεις, τότε είναι και η  $r_1+r_2$



## Κανονικές Εκφράσεις (2/3)

- Οι παραπάνω προτάσεις σημαίνουν τα εξής:
  - Οι παρενθέσεις χρησιμεύουν μόνο για ομαδοποίηση
  - Το αστέρι συμβολίζει καμία ή περισσότερες επαναλήψεις της εκάστοτε κανονικής έκφρασης που προηγείται  
(Έτσι, αν  $x \in \Sigma$ , τότε η κανονική έκφραση  $x^*$  συμβολίζει την γλώσσα  $\{\epsilon, x, xx, xxx, \dots\}$ )
  - Η παράθεση των  $r_1$  και  $r_2$  συμβολίζει τις συμβολοσειρές που περιγράφονται από το  $r_1$  και ενώνονται με αυτές που περιγράφονται από το  $r_2$   
(Για παράδειγμα, αν  $x, y \in \Sigma$ , τότε η κανονική έκφραση  $xy$  περιγράφει την γλώσσα  $\{xy\}$ )



## Κανονικές Εκφράσεις (3/3)

- Το σύμβολο της πρόσθεσης, διαβάζεται ως διαζευκτικό "ή", χρησιμοποιείται στην περιγραφή των γλωσσών που περιγράφονται από κάποιο υποσύνολο της μιας ή της άλλης κανονικής έκφρασης  
(Για παράδειγμα, αν  $x, y \in \Sigma$ , τότε η κανονική έκφραση  $x+y$  περιγράφει την γλώσσα  $\{x, y\}$ )

**Προτεραιότητα:** \* το αστέρι είναι πρώτο, έχει, δηλαδή, τη μεγαλύτερη προτεραιότητα, ακολουθεί η παράθεση, και τέλος το +  
(Για παράδειγμα, το  $a+bc^*$  περιγράφει την γλώσσα  $\{a, b, bc, bcc, bccc, bccccc, \dots\}$ )



# Γλώσσες που περιγράφονται από κανονικές εκφράσεις

- Υπάρχει μία απλή αντιστοιχία στις κανονικές εκφράσεις και τις γλώσσες που περιγράφονται απ' αυτές:

Κανονική έκφραση	$L(\text{κανονική έκφραση})$
$x$ , για κάθε $x \in \Sigma$	$\{x\}$
$\epsilon$	$\{\epsilon\}$
$\emptyset$	$\{\}$
$(r_1)$	$L(r_1)$
$r_1^*$	$L(r_1)^*$
$r_1 r_2$	$L(r_1) L(r_2)$
$r_1 + r_2$	$L(r_1) \cup L(r_2)$



# Δημιουργώντας Κανονικές Εκφράσεις (1/4)

- Παρακάτω υπάρχουν κάποιες οδηγίες για την δημιουργία κανονικών εκφράσεων
- Θα θεωρήσουμε ότι  $\Sigma = \{a, b, c\}$   
**Κανένα ή περισσότερα**
  - Το  $a^*$  σημαίνει "**κανένα ή περισσότερα a**"
  - Αν πούμε "**κανένα ή περισσότερα ab**", αυτό σημαίνει,  $\{\epsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$ , και συμβολίζεται  $(ab)^*$
  - Το  $ab^*$  δεν είναι σωστό επειδή περιγράφει την γλώσσα  $a(b)^*$ , δηλαδή την  $\{a, ab, abb, abbb, abbbb, \dots\}$



# Δημιουργώντας Κανονικές Εκφράσεις (2/4)

## Ένα ή περισσότερα

- Εφόσον το  $a^*$  σημαίνει "κανένα ή περισσότερα  $a$ ", μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το  $aa^*$  (ή ισοδύναμα,  $a^*a$ ) για να γράψουμε "ένα ή περισσότερα  $a$ "
- Ομοίως, για να περιγράψουμε "ένα ή περισσότερα  $ab$ ", δηλαδή,  $\{ab, abab, ababab, \dots\}$ , γράφουμε  $ab(ab)^*$

## Κανένα ή ένα

- Μπορούμε να περιγράψουμε ένα ή κανένα  $a$  ως  $(a+\epsilon)$



# Δημιουργώντας Κανονικές Εκφράσεις (3/4)

## Οποιαδήποτε συμβολοσειρά

- Για να περιγράψουμε οποιαδήποτε συμβολοσειρά (με  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ), χρησιμοποιούμε την έκφραση  $(a+b+c)^*$

## Οποιαδήποτε μη κενή συμβολοσειρά.

- Αυτό μπορεί να γραφεί σαν οποιοδήποτε σύμβολο του  $\Sigma$  ακολουθούμενο από οποιαδήποτε συμβολοσειρά:  
 $(a+b+c)(a+b+c)^*$



# Δημιουργώντας Κανονικές Εκφράσεις (4/4)

**Οποιαδήποτε συμβολοσειρά δεν περιέχει....**

- Για να περιγράψουμε οποιαδήποτε συμβολοσειρά δεν περιέχει το  $a$  (με  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ), χρησιμοποιούμε την έκφραση  $(b+c)^*$

**Οποιαδήποτε συμβολοσειρά περιέχει ακριβώς ένα...**

- Για να περιγράψουμε οποιαδήποτε συμβολοσειρά περιέχει ακριβώς ένα  $a$ , τοποθετούμε "**οποιαδήποτε συμβολοσειρά δεν περιέχει ένα  $a$** ", σε κάθε μεριά του  $a$ , με αυτόν τον τρόπο:  $(b+c)^*a(b+c)^*$





# Παραδείγματα Κανονικών Εκφράσεων (1/4)

- Δημιουργήστε τις κανονικές εκφράσεις για τις παρακάτω γλώσσες στο αλφάβητο

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

**Όλες οι συμβολοσειρές που περιέχουν ακριβώς ένα a**

$$(b+c)^* a (b+c)^*$$



## Παραδείγματα Κανονικών Εκφράσεων (2/4)

- Δημιουργήστε τις κανονικές εκφράσεις για τις παρακάτω γλώσσες στο αλφάβητο

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

**Όλες οι συμβολοσειρές που δεν περιέχουν περισσότερα από τρία a.**

- Μπορούμε να περιγράψουμε την συμβολοσειρά που περιέχει μηδέν, ένα, δύο ή τρία a (και τίποτα άλλο) ως εξής

$$(ε+a)(ε+a)(ε+a)$$

- Τώρα θέλουμε να συμπεριλάβουμε συμβολοσειρές που δεν περιέχουν a όπου βρίσκονται τα X:

$$X(ε+a)X(ε+a)X(ε+a)X$$

- έτσι τοποθετούμε όπου X το  $(b+c)^*$  :

$$(b+c)^*(ε+a)(b+c)^*(ε+a)(b+c)^*(ε+a)(b+c)^*$$



# Παραδείγματα Κανονικών Εκφράσεων (3/4)

Τελικά, αντικαθιστώντας τα  $X$  με  $(a+b+c)^*$  έχουμε την λύση:

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^* a (a+b+c)^* b (a+b+c)^* c (a+b+c)^* + \\ & (a+b+c)^* a (a+b+c)^* c (a+b+c)^* b (a+b+c)^* + \\ & (a+b+c)^* b (a+b+c)^* a (a+b+c)^* c (a+b+c)^* + \\ & (a+b+c)^* b (a+b+c)^* c (a+b+c)^* a (a+b+c)^* + \\ & (a+b+c)^* c (a+b+c)^* a (a+b+c)^* b (a+b+c)^* + \\ & (a+b+c)^* c (a+b+c)^* b (a+b+c)^* a (a+b+c)^* \end{aligned}$$



# Παραδείγματα Κανονικών Εκφράσεων (4/4)

Όλες τις συμβολοσειρές που δεν περιέχουν το  $a$  πάνω από δύο φορές συνεχόμενα

- Μπορούμε πολύ εύκολα να δημιουργήσουμε μια έκφραση, που να περιέχει κανένα  $a$ , ένα  $a$ , ή ένα  $aa$ :

$$(b+c)^*(\epsilon + a+aa)(b+c)^*$$

- αλλά αν θέλουμε να το επαναλάβουμε, πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε τουλάχιστον ένα μη- $a$  σύμβολο μεταξύ των επαναλήψεων:

$$(b+c)^*(\epsilon+aa)(b+c)^*((b+c)(b+c)^*(\epsilon+aa)(b+c)^*)^*$$

Όλες τις συμβολοσειρές που περιέχουν το  $a$  εις τριπλούν

$$(aaa+b+c)^*$$



# Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.
- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

## Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064
- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369
- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003
- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Αλέξανδρος Τζάλλας.  
Θεωρία Υπολογισμού.

Έκδοση: 1.0 Άρτα, 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<http://eclass.teiep.gr/courses/COMP112/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης  
Άρτα, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Τέλος Ενότητας

## Κανονικές Εκφράσεις



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

