Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 11 : **Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα**

Αλέξανδρος Τζάλλας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανοιχτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 11 : Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Αλέξανδρος Τζάλλας

Καθηγητής Εφαρμογών

Άρτα, 2015

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Ηπείρου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα Ι

$\alpha(\alpha^* \cup b^*)b$ κανονική έκφραση – παραγωγή γλώσσας

παραγωγή γλώσσας από **γραμματική χωρίς συμφραζόμενα**

$$\left.\begin{array}{l} S \to \alpha M b \\ M \to A \\ M \to B \\ A \to e \\ A \to \alpha A \\ B \to e \\ B \to bB \end{array}\right\}$$

κανόνες της γραμματικής

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα ΙΙ

- Άρχισε με τη συμβολοσειρά που αποτελείται από το μοναδικό σύμβολο S.

- Βρες ένα σύμβολο στην παρούσα συμβολοσειρά που να εμφανίζεται στα αριστερά του $\rightarrow$ ενός εκ των παραπάνω κανόνων.

- Αντικατέστησε μια εμφάνιση αυτού του συμβόλου με τη συμβολοσειρά που υπάρχει στα δεξιά του $\rightarrow$ του ίδιου κανόνα.

- Επανάλαβε τη διαδικασία αυτή ώσπου να μην υπάρχει άλλο τέτοιο σύμβολο.

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα III

- **Ορισμός**: Μία **γραμματική χωρίς συμφραζόμενα** G είναι μία τετράδα (V, Σ, R, S), όπου
  - V είναι ένα αλφάβητο
  - Σ (το σύνολο των **τερματικών**) είναι υποσύνολο του V
  - R (το σύνολο των **κανόνων**) είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(V\text{-}\Sigma)\times V^*$ και
  - S (το **αρχικό σύνολο**) είναι ένα στοιχείο του V- Σ

  Τα στοιχεία του V-Σ ονομάζονται **μη τερματικά**. Για κάθε $A\in V\text{-}\Sigma$ και $u\in V^*$, γράφουμε $A\rightarrow_G u$ όποτε $(A, u)\in R$. Για όλες τις συμβολοσειρές u, $v \in V^*$ γράφουμε $u\Rightarrow_G v$ αν και μόνο αν υπάρχουν συμβολοσειρές x, y $\in V^*$ και $A\in V\text{-}\Sigma$ έτσι ώστε $u=xAy$, $v=xv'y$ και $A\rightarrow_G v'$. Η σχέση $\Rightarrow_G^*$ είναι η ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα της $\Rightarrow_G$. Τέλος, L(G), δηλ. η **γλώσσα που παράγεται** από τη G είναι η $\{w\in\Sigma^*: S \Rightarrow_G^* w\}$. Μία γλώσσα L ονομάζεται **γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα**, αν ισούται με L(G) για κάποια γραμματική G χωρίς συμφραζόμενα.

Αυτόματα στοίβας

Θεωρείστε τη γλώσσα $\{\alpha^n b^n : n \geq 0\}$ που παράγεται από γραμματική με κανόνες:

$S \rightarrow \alpha S \alpha$

$S \rightarrow bSb$

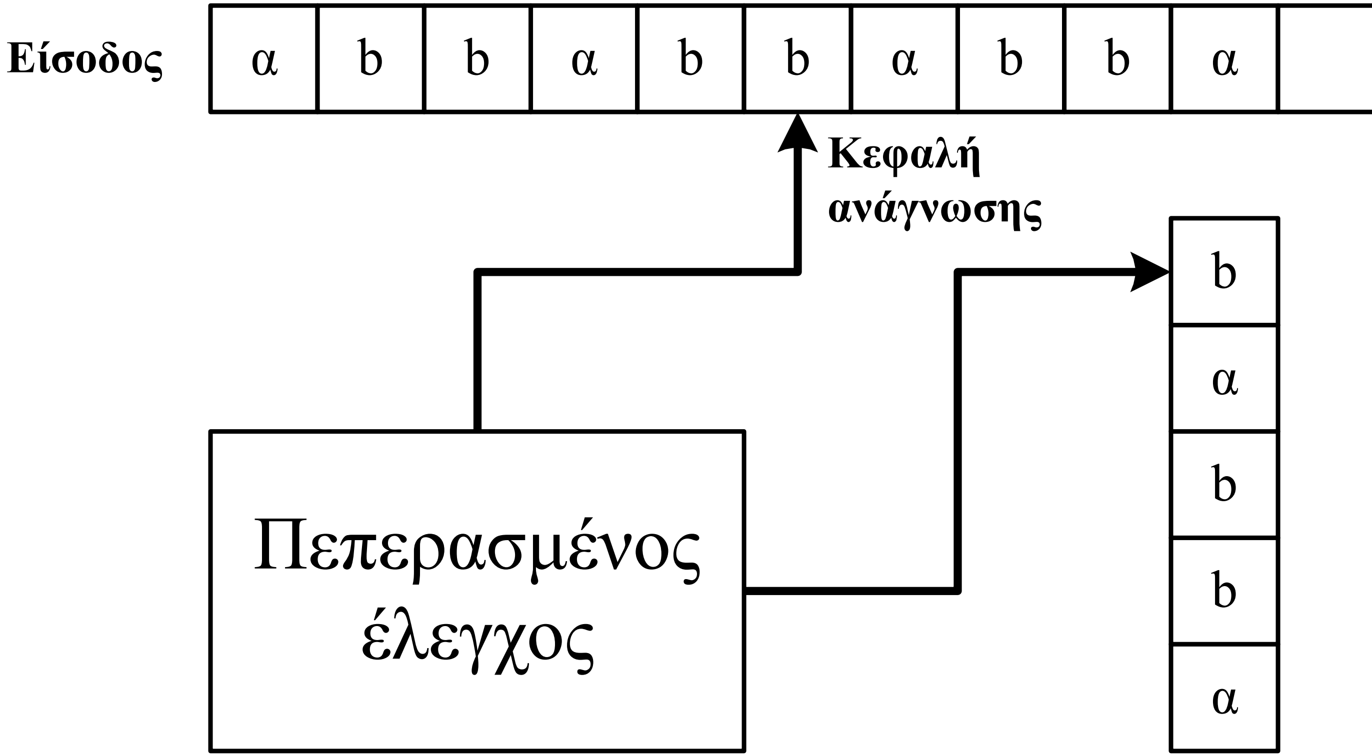
$S \rightarrow e$

Το αυτόματο που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές αυτής της γλώσσας θα έπρεπε να «θυμάται» το πρώτο μισό της συμβολοσειράς εισόδου, έτσι ώστε να το συγκρίνει – αντεστραμμένο – με το δεύτερο μισό της.

ΑΥΤΟ ΔΕ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟ

ΓΙΝΕΤΑΙ ΟΜΩΣ ΑΠΟ ΕΝΑΝ ΑΛΛΟ ΤΥΠΟ ΜΗΧΑΝΗΣ ΠΟΥ ΛΕΓΕΤΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΣΤΟΙΒΑΣ

Αυτόματα στοίβας



Αυτόματα στοίβας

- **Ορισμός**: Το **αυτόματο στοίβας** είναι μία εξάδα M=(K, Σ, Γ, Δ, s, F), όπου

K	είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων
Σ	είναι ένα αλφάβητο (τα σύμβολα εισόδου)
Γ	είναι ένα αλφάβητο (τα σύμβολα στοίβας)
$s \in K$	είναι η αρχική κατάσταση
$F \subseteq K$	είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων
Δ	η σχέση μετάβασης, είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(K\times(\Sigma\cup\{e\})\times\Gamma^*)\times(K\times\Gamma)$

αν $((p, \alpha, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$, τότε το M όποτε είναι στην κατάσταση p με το β στην κορυφή της στοίβας και διαβάζει α από την ταινία εισόδου, αντικαθιστά το β με την γ στην κορυφή της στοίβας

Αυτόματα στοίβας & γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

- **Θεώρημα**: Κάθε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα γίνεται δεκτή από κάποιο αυτόματο στοίβας.
  Απόδειξη:
  Έστω G=(V, Σ, R, S) μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα.
  Πρέπει να κατασκευάσουμε ένα αυτόματο στοίβας M τέτοιο ώστε L(M)=L(G).
  Η μηχανή M μπορεί να έχει μόνο δύο καταστάσεις τις p και q και μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε να βρίσκεται πάντα στην κατάσταση q μετά την πρώτη κίνηση.
  Ορίζουμε το M ως M=({p, q}, Σ, V, Δ, p, {q}), όπου Δ περιέχει τις παρακάτω μεταβάσεις:
  (1) ((p, e, e), (q, S))
  (2) ((q, e, A), (q, x)) για κάθε κανόνα $A \rightarrow x$ στο R
  (3) ((q, α, α), (q, e)) για κάθε $\alpha \in \Sigma$

Αυτόματα στοίβας & γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Απόδειξη (συνέχεια):

Το αυτόματο στοίβας M ξεκινάει εισάγοντας το S στην αρχικά άδεια στοίβα του και μεταβαίνει στην κατάσταση q.

Σε καθένα από τα επόμενα βήματα:

είτε αντικαθιστά το σύμβολο A στην κορυφή της στοίβας υπό την προϋπόθεση ότι είναι μη τερματικό με το x που βρίσκεται στο δεξί μέρος κάποιου κανόνα $A \rightarrow x$ (μεταβάσεις τύπου 2)

είτε εξάγει το σύμβολο στην κορυφή της στοίβας, υπό την προϋπόθεση ότι είναι τερματικό και ταιριάζει με το επόμενο σύμβολο εισόδου (μεταβάσεις τύπου 3)

Οι μεταβάσεις του M έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε κατά τη διάρκεια ενός υπολογισμού που καταλήγει στην αποδοχή της συμβολοσειράς, το αυτόματο να μιμείται μία αριστερότερη παραγωγή της συμβολοσειράς εισόδου.

Θα μπορούσε να κατασκευαστεί ώστε να λειτουργεί με διαφορετικό τρόπο.

Αυτόματα στοίβας & γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Απόδειξη (συνέχεια):

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι L(M) = L(G)

Ισχυρισμός: Έστω $w \in \Sigma^*$ και $\alpha \in (V-\Sigma)V^* \cup \{e\}$. Τότε $S \Rightarrow_{L^*} w\alpha$, αν και μόνο αν $(q, w, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha)$

Αν αποδειχθεί ο ισχυρισμός, τότε για α = e θα προκύψει ότι $S \Rightarrow_{L^*} w$, αν και μόνο αν $(q, w, S) \vdash_M^* (q, e, e)$, που αυτό σημαίνει ότι $w \in L(G)$ αν και μόνο αν $w \in L(M)$.

Απόδειξη ισχυρισμού (μόνο αν): Υποθέτουμε ότι $S \Rightarrow_{L^*} w\alpha$ όπου $w \in \Sigma^*$ και $\alpha \in (V-\Sigma)V^* \cup \{e\}$. Θα αποδείξουμε με απαγωγή στο μήκος της αριστερότερης παραγωγής του w ότι $(q, w, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha)$

Βασικό βήμα: Αν η παραγωγή έχει μήκος 0, τότε w = e και α = S, οπότε πράγματι ισχύει $(q, w, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha)$

Αυτόματα στοίβας & γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Απόδειξη (συνέχεια):

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέστε ότι αν $S \Rightarrow_{L^*} w\alpha$, μέσω μιας παραγωγής μήκους n ή μικρότερο, όπου $n \geq 0$, τότε $(q, w, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha)$

Επαγωγικό βήμα: Έστω

$$S = u_0 \Rightarrow_L u_1 \Rightarrow_L \ldots \Rightarrow_L u_n \Rightarrow_L u_{n+1} = w\alpha$$

μία αριστερότερη παραγωγή της wα από το S. Έστω A το αριστερότερο μη τερματικό της u_n . Τότε $u_n = xA\beta$ και $u_{n+1} = x\gamma\beta$ όπου $x \in \Sigma^*$, $\beta, \gamma \in V^*$ και $A \to \gamma$ είναι ένας κανόνας της γραμματικής.

Εφόσον υπάρχει μία αριστερότερη παραγωγή μήκους n της $u_n = xA\beta$ από το S, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης

$$(q, x, S) \vdash_M^* (q, e, A\beta) \qquad (1)$$

Αφού όμως ο $A \to \gamma$ είναι ένας κανόνας της γραμματικής, τότε από τον τρόπο κατασκευής του αυτόματου, μέσω μιας μετάβασης τύπου 2 έχω

Αυτόματα στοίβας & γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Απόδειξη (συνέχεια):

$$(q, e, A\beta) \vdash_M (q, e, \gamma\beta) \qquad (2)$$

Παρατηρούμε όμως ότι η u_{n+1} είναι wα αλλά είναι επίσης xγβ.
Άρα υπάρχει συμβολοσειρά $y \in \Sigma^*$ τέτοια ώστε $w=xy$ και $y\alpha=\gamma\beta$
και οι σχέσεις (1) και (2) μπορούν επίσης να γραφούν ως

$$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, \gamma\beta)$$

αλλά εφόσον $y\alpha = \gamma\beta$

$$(q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, e, \alpha)$$

μέσω μιας ακολουθίας $|y|$ μεταβάσεων τύπου 3. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις αποδεικνύεται το επαγωγικό βήμα.

Βιβλιογραφία

- H.R. Lewis, Χ. Παπαδημητρίου, "Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού", 1η έκδοση/2005, Εκδόσεις Κριτική, ISBN: 978-960-218-397-7 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 11776 2.
- M. Sipser, "Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού", 1η έκδοση/2009, Εκδόσεις ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN: 978-960-524-243-5 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 257

Επιπλέον συνιστώμενη βιβλιογραφία

- E. Rich, "Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications", 1st edition/2007, Prentice Hall, ISBN: 978-0132288064
- J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation", 3rd edition/2006, Prentice Hall, ISBN: 978-0321455369
- J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Intoduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2nd ed., Pearson - Addison Wesley, 2003
- M. Sipser, Εισαγωγή στη Θεωρία Υπολογισμού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευάγγελος Καρβούνης

Άρτα, 2015

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τέλος Ενότητας

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ