



Ελληνική Δημοκρατία
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό
Ίδρυμα Ηπείρου

Τοπογραφία – Γεωμορφολογία (Εργαστήριο)

Ενότητα 13: Ογκομετρήσεις

Δρ. Γρηγόριος Βάρρας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

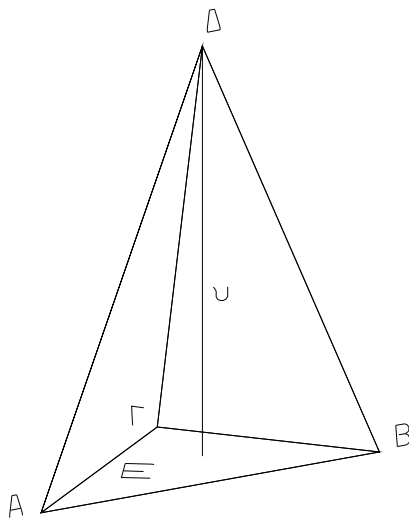


ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

1.1. ΟΓΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

1.1.1. ΟΓΚΟΣ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

Τετράεδρο είναι κάθε στερεό το οποίο έχει τέσσερες έδρες (Σχήμα 1). Παράδειγμα τετραέδρου είναι μια τριγωνική πυραμίδα. Μια έδρα του στερεού θεωρείται βάση και οι υπόλοιπες είναι οι παράπλευρες έδρες. Από κάθε κορυφή του τετραέδρου η κάθετος προς την απέναντι έδρα λέγεται ύψος.



Σχήμα 1 : Τετράεδρο

Έστω τετράεδρο Δ.ΑΒΓ, του οποίου το εμβαδό της βάσης ΑΒΓ είναι Ε και το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση ΑΒΓ είναι υ. Ο όγκος δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{1}{3}Ev$$

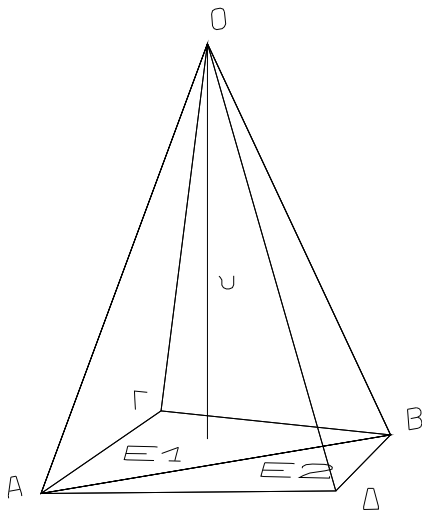
Σε κάθε τετράεδρο ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Το γινόμενο του εμβαδού οποιασδήποτε έδρας τετραέδρου επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή, είναι σταθερό και ισούται με τον όγκο του στερεού.

1.1.2. ΟΓΚΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

Πυραμίδα είναι το στερεό, που έχει σαν βάση ένα πολύγωνο και όλες οι παράπλευρες έδρες του είναι τρίγωνα. Οι παράπλευρες τριγωνικές έδρες έχουν βάση μια πλευρά του πολυγώνου και κοινή κορυφή, η οποία είναι η κορυφή της πυραμίδας (Σχήμα 2). Από την κορυφή της πυραμίδας η κάθετη προς τη βάση ονομάζεται **ύψος** της πυραμίδας.

Έστω πυραμίδα Ο.ΑΓΒΔ, με εμβαδό βάσης **E** και ύψος **υ**. Ο όγκος της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, είναι ίσος με το άθροισμα των τετραέδρων Ο.ΑΒΓ και Ο.ΑΒΔ, τα οποία έχουν βάσεις E_1 και E_2 αντίστοιχα. Το ύψος των τετραέδρων είναι ίσο με $υ$. Είναι προφανές ότι $E = E_1 + E_2$. Συνεπώς ο όγκος της πυραμίδας υπολογίζεται με τον τύπο:



Σχήμα 2 : Πυραμίδα

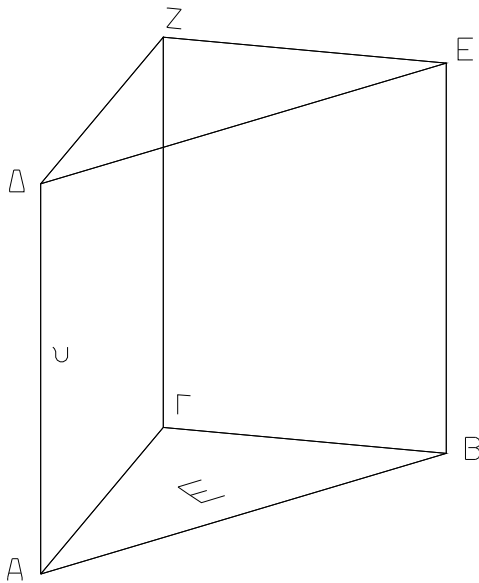
$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}E_1υ + \frac{1}{3}E_2υ = \frac{1}{3}(E_1 + E_2)υ \Rightarrow$$

$V = \frac{1}{3}Eυ$

1.1.3. ΟΓΚΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Τριγωνικό πρίσμα είναι το στερεό, που έχει σαν βάσεις δύο ίσα τρίγωνα σε παράλληλα επίπεδα και όλες οι παράπλευρες έδρες είναι

παραλληλόγραμμα (Σχήμα 3). Η κάθετη απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του τριγωνικού πρίσματος.



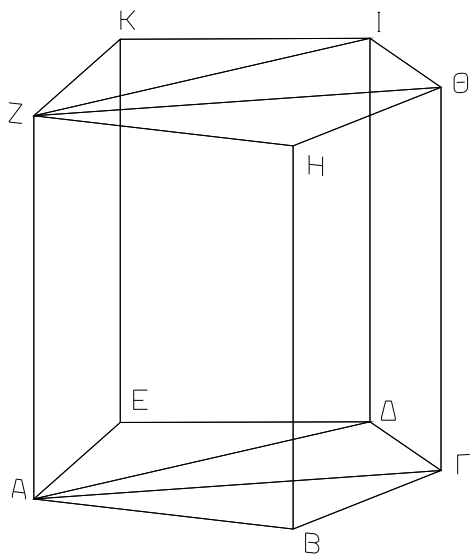
Σχήμα 3 : Τριγωνικό πρίσμα

Έστω τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ.ΔΕΖ με εμβαδό βάσης **E** και ύψος **u**. Ο όγκος του στερεού δίνεται από τον τύπο:

$$V = E \cdot u$$

1.1.4. ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Πρίσμα είναι το στερεό, που έχει σαν βάσεις δύο ίσα πολύγωνα σε παράλληλα επίπεδα και όλες οι παράπλευρες έδρες είναι παραλληλόγραμμα. Η επιφάνεια, που αποτελείται από όλα τα επίπεδα των παράπλευρων εδρών του πρίσματος λέγεται **πρισματική επιφάνεια**. Η κάθετη ευθεία προς τις δύο βάσεις είναι το **ύψος** του στερεού.



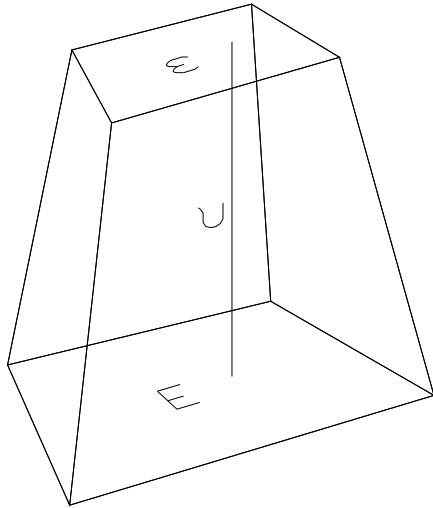
Σχήμα 4 : Πρίσμα

Έστω πρίσμα ΑΒΓΔΕ.ΖΗΘΙΚ, με εμβαδό βάσης **E** και ύψος **υ**. Διανέμουμε τις βάσεις σε τρίγωνα τηρώντας την αναλογία των κορυφών, τα οποία θεωρούμε σαν βάσεις τριγωνικών πρισμάτων. Το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ισούται με το εμβαδό της βάσης του πρίσματος. Τα τριγωνικά πρίσματα έχουν όλα το ίδιο ύψος με το ολικό πρίσμα. Επομένως, ο όγκος του πρίσματος είναι ίσος με το άθροισμα των όγκων των τριγωνικών πρισμάτων. Ο τύπος που δίνει τον όγκο τυχαίου πρίσματος είναι:

$V = E \cdot \upsilon$

1.1.5. ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

Κόλουρη πυραμίδα είναι το τμήμα μιας πυραμίδας μεταξύ της βάσης της και ενός επιπέδου παράλληλου προς τη βάση. Το στερεό, που προκύπτει, έχει δύο βάσεις σε παράλληλα επίπεδα, που είναι όμοια πολύγωνα και όλες οι παράπλευρες έδρες του είναι τραπέζια. Η κάθετη προς τις βάσεις είναι το **ύψος** της κόλουρης πυραμίδας.



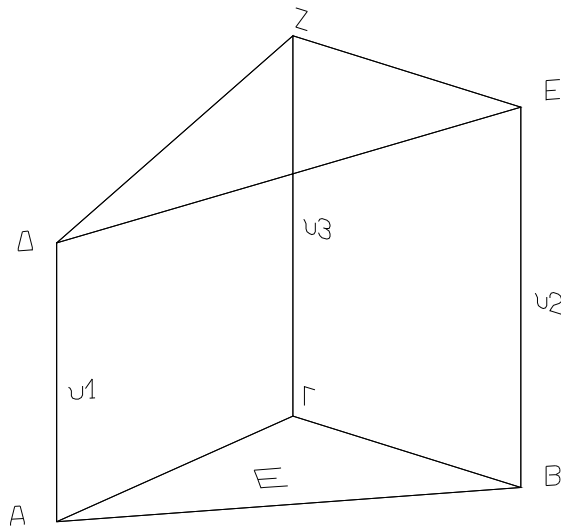
Σχήμα 5 : Κόλουρη πυραμίδα

Έστω ότι μια κόλουρη πυραμίδα έχει εμβαδά βάσεων **E** και **ε** αντίστοιχα και ύψος **υ**. Ο όγκος του στερεού είναι:

$$V = \frac{1}{3}(E + \sqrt{E \cdot \varepsilon} + \varepsilon) \cdot \upsilon$$

1.1.6. ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΒΟΥ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Κολοβό τριγωνικό πρίσμα είναι το στερεό, που παράγεται από την τομή μιας τριγωνικής πρισματικής επιφάνειας με δύο επίπεδα όχι παράλληλα μεταξύ τους. Κάθε επίπεδο κάθετο προς την πρισματική επιφάνεια παράγει μια **κάθετη τομή** του κολοβού πρίσματος. Το **ύψος** του κολοβού πρίσματος **δεν ορίζεται**.



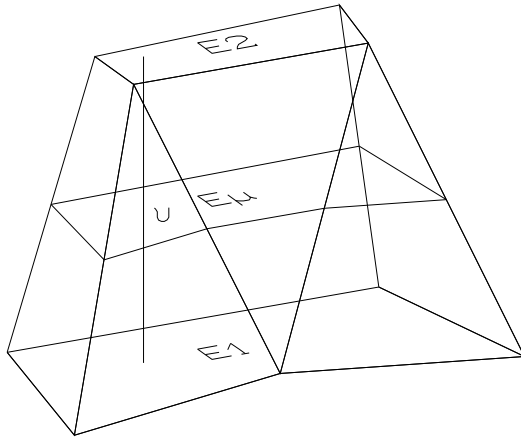
Σχήμα 6 : Κολοβό τριγωνικό πρίσμα

Έστω ότι ένα κολοβό τριγωνικό πρίσμα έχει εμβαδό κάθετης τομής ίσο με E και τα μήκη των παράπλευρων ακμών είναι u_1, u_2, u_3 . Ο όγκος του στερεού είναι:

$$V = \frac{1}{3}E(u_1 + u_2 + u_3)$$

1.1.7. ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΕΙΔΟΥΣ

Πρισματοειδές λέγεται το στερεό, που έχει σαν βάσεις δύο πολύγωνα σε παράλληλα επίπεδα και δεν έχει άλλες κορυφές εκτός από τις κορυφές των βάσεων (Σχήμα 7). Όλες οι παράπλευρες έδρες του στερεού είναι τρίγωνα ή τραπέζια, με τις βάσεις και τις κορυφές τους σε κάποιες ακμές ή κορυφές των βάσεων του στερεού. Η κάθετη απόσταση των βάσεων λέγεται **ύψος** του πρισματοειδούς. Η τομή του στερεού από ένα επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις, που ισαπέχει από αυτές, λέγεται **μέση τομή**.



Σχήμα 7 : Πρισματοειδές

Ένα πρισματοειδές έχει εμβαδά βάσεων E_1 και E_2 και ύψος υ . Το εμβαδό της μέσης τομής είναι E_μ . Ο όγκος του στερεού δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{1}{6} \upsilon (E_1 + 4E_\mu + E_2)$$

Το συνηθέστερο στερεό, με το οποίο γίνονται οι προσεγγίσεις εδαφικών όγκων είναι το πρισματοειδές. Γίνεται εκτεταμένη χρήση του στις μελέτες οδοποιίας, εκσκαφής τάφρων, διευθέτησης χειμάρρων κ.λπ.

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

Αποστολάκης Κ., 1991. Τοπογραφία, Μετρήσεις-Σφάλματα-Τριγωνισμός - Οδεύσεις - Αποτυπώσεις-Υπολογισμός Εμβαδών και Όγκων, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Πειραιάς, 501 σελίδες.

Βλάχος Δ., 1997. Τοπογραφία, Τόμος Α'- Όργανα και Μέθοδοι Μετρήσεων, Θεσσαλονίκη, 418 σελίδες.

Βλάχος Δ., 1997. Τοπογραφία, Τόμος Β'- Τοπογραφικές Χαρτογραφήσεις, Θεσσαλονίκη, 368 σελίδες.

Νίκου Ν., 1999. Τοπογραφία Ι, Εκδόσεις Art of Text, Θεσσαλονίκη, 206 σελίδες.

Νίκου Ν., 2004. Τοπογραφία ΙΙ, Θεωρία-Εφαρμογές, Εκδόσεις Γιαχούδη, Θεσσαλονίκη, 212 σελίδες

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Ίδρυμα Ηπείρου. Γρηγόριος Βάρρας
Τοπογραφία – Γεωμορφολογία
(Εργαστήριο)

<http://eclass.teiep.gr/courses/TEXG123/>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, Διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Επεξεργασία: Χρήστος Μυριούνης
Άρτα 2015